



سید دره لیکت علمی بین المللی پایا

فصل اول: راهبردهای حل مسئله

۱- راهبرد رسم شکل

کشیدن یک شکل مناسب می تواند به حل مسئله کمک کند. برای حل بعضی از مسئله‌ها ریاضی نیازی به انجام عملیات ریاضی ندارید بلکه فقط با رسم شکل مناسب می توانید آن مسئله را حل کنید.



هادی صندوق دار یکی از فروشگاه‌های زنجیره‌ای شهر است. ساختمان این فروشگاه چند طبقه است و هادی در طبقه وسط این فروشگاه کار می کند. یک روز او بعد از ساعت کاری خود در فروشگاه مشغول خرید شد. او ابتدا به قسمت لوازم منزل که سه طبقه بالاتر بود رفت. بعد برای خرید از قسمت بچه گانه پنج طبقه پایین آمد، سپس شش طبقه بالا رفت تا از قسمت لوازم صوتی خرید کند. در آخر ۹ طبقه پایین آمد و از در خروجی ساختمان که در طبقه اول بود خارج شد، این فروشگاه بزرگ چند طبقه دارد؟



برای حل این مسئله از رسم شکل استفاده می کنیم:

_____	لوازم صوتی
_____	لوازم منزل

_____	وسط
_____	بچه گانه

_____	طبقه اول

بنابراین، این فروشگاه ۱۱ طبقه دارد.

International Scientific League of PAYA2017

بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور و پنجمین دوره مسابقات دانش آموزی جهان اسلام در ایران

از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، علوم کامپیوتر- برنامه نویسی و پژوهشی

تلفن :- ۶۶۱۲۹۲۸۴-۶۶۱۲۸۰۳۵-۶۶۱۲۸۰۳۱

www.Payaleague.ir

[Telegram.me/payaleague](https://t.me/payaleague)

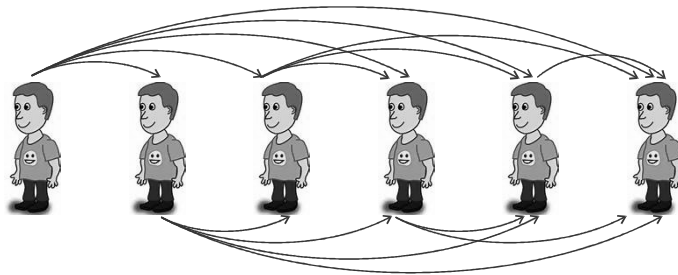


مثال

اگر شش نفر در یک جلسه یکدیگر را ملاقات کنند و دو به دو به هم دست بدهند، عمل دست دادن روی هم رفته چند بار تکرار شده است؟

پاسخ

برای حل این مسئله از رسم شکل استفاده می‌کنیم و دست دادن هر دو نفر را با یک خط نشان می‌دهیم.



تعداد دست دادن‌ها $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

۲- راهبرد الگویابی

یافتن الگو مهارتی مهم است که در حل بسیاری از مسئله‌ها به ما کمک می‌کند.

مثال

اگر دهم فروردین جمعه باشد. اول دی همان سال چند شنبه است؟

پاسخ

می‌دانیم در یک هفته، بعد از هفت روز ایام هفته تکرار می‌شود. بنابراین کافی است فاصله بین دهم فروردین و اول دی را حساب کنیم و سپس حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم و به تعداد باقی مانده از روز دهم فروردین جلو برویم.

۲۱ روز از فروردین مانده، ۵ ماه ۳۱ روزه و ۳ ماه ۳۰ روزه و یک روز از دی ماه داریم. بنابراین تعداد روزها برابر است با:

$$21 + 5 \times 31 + 3 \times 30 + 1 = 267$$

$$\begin{array}{r} 267 \quad | \quad 7 \\ -21 \quad 38 \\ \hline 57 \\ -56 \\ \hline 1 \end{array}$$

در نتیجه کافی است از جمعه یک روز جلو برویم، یعنی روز اول دی، شنبه است.

۳- راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

حذف حالت‌هایی که با شرایط و آن چه مسئله خواسته مطابقت ندارند، بسیاری اوقات منجر به حل مسئله می‌شود.



خسرو در روزهای سه‌شنبه، چهارشنبه و پنج‌شنبه دروغ‌گوست و در سایر روزهای هفته راست‌گوست. فرهاد در روزهای شنبه، یک‌شنبه، دوشنبه دروغ می‌گوید و در سایر روزهای هفته دروغ نمی‌گوید. اگر امروز هر دو نفر آن‌ها بگویند: «من دیروز دروغ گفته‌ام». امروز چه روزی است؟



در جدول زیر روزهای دروغ‌گویی هر فرد را با \times و روزهای راست‌گویی را با \checkmark نشان داده‌ایم:

شنبه	یک‌شنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	
\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times	\times	\times	\checkmark	خسرو
\times	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	فرهاد

حال با استفاده از روش حذف حالت‌های نامطلوب، روزهایی که ممکن نیست امروز باشد را حذف می‌کنیم، امروز ممکن نیست شنبه باشد، چون خسرو روزهای شنبه و جمعه راست‌گوست. به همین ترتیب می‌توان روزهای یک‌شنبه، دوشنبه را نیز حذف کرد و با همین استدلال برای فرهاد روزهای چهارشنبه، پنج‌شنبه و جمعه نیز حذف می‌شود، بنابراین امروز سه‌شنبه است.

۴- راهبرد الگوسازی (جدول نظام‌دار)

سازمان‌دهی اطلاعات و داده‌های یک مسئله در یک جدول که دارای نظم و ترتیبی مشخص باشد، به ما کمک می‌کند که الگوی مسئله را پیدا کرده و اطلاعات پنهان در داده‌ها را به دست آوریم.



مساحت مستطیلی ۴۲ است، چند مستطیل با این ویژگی وجود دارد؟



بنابراین ۴ مستطیل با این ویژگی وجود دارد.

عرض	طول
۱	۴۲
۲	۲۱
۳	۱۴
۶	۷

۵- راهبرد حدس و آزمایش

گاهی اوقات می‌توان با حدس زدن پاسخ مسئله و بررسی این حدس، مسئله را حل کرد. البته در این راهبرد باید سعی نمود در هر مرحله با استدلال منطقی حدس خود را مرحله به مرحله بهتر کنیم.



تعداد ۱۰ تومانی‌های سحر، پنج تا بیشتر از تعداد ۲۵ تومانی‌های اوست. او جمعاً ۳۳۰ تومان پول دارد. سحر چه تعداد ۱۰ تومانی و چه تعداد ۲۵ تومانی دارد؟



تعداد ۲۵ تومانی	تعداد ۱۰ تومانی	بررسی حدس
۱۰	۸	×
۶	۱۸	×
۸	۱۳	✓

۶- راهبرد تبدیل يك مسئله به زیر مسئله‌ها

برای حل مسئله‌های پیچیده می‌توان آن‌ها را به زیر مسئله‌های کوچک‌تر و ساده‌تر تقسیم کرد که حل این زیر مسئله‌ها قدم به قدم به حل مسئله اصلی منجر می‌شود.



در یک هواپیما که دو سوم آن پر بود، ۲۰٪ مسافران پسر، یک چهارم زن، یک هشتم مسافران دختر و ۶۸ نفر از آن‌ها مرد بودند. در این هواپیما چند صندلی وجود داشت؟



زیر مسئله اول: چه کسری از مسافران زن، دختر یا پسر هستند؟

$$\frac{20}{100} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8+10+5}{40} = \frac{23}{40}$$

زن، دختر و پسر

زیر مسئله دوم: چه کسری از مسافران مرد هستند؟

$$\Rightarrow \frac{40}{40} - \frac{23}{40} = \frac{17}{40} \text{ مرد}$$

زیر مسئله سوم: تعداد کل مسافران چقدر است؟

$$\frac{17}{40} = \frac{68}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{68} \times 40}{\cancel{17}} = 160$$

حال با توجه به این که دو سوم هواپیما پر است، می توان تعداد صندلی ها را تعیین کرد:

$$\frac{3}{x} \times \cancel{160} = 240$$

۷- راهبرد حل مسئله ساده تر



حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015}\right)$$



این مسئله را ابتدا در حالت ساده تر، یعنی با ۲، ۳ و ۴ پرانتز حل می کنیم.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\cancel{2}}{2} \times \frac{4}{\cancel{3}} = \frac{4}{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{\cancel{2}}{2} \times \frac{\cancel{3}}{3} \times \frac{5}{\cancel{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{\cancel{2}}{2} \times \frac{\cancel{3}}{3} \times \frac{\cancel{4}}{4} \times \frac{6}{\cancel{5}} = \frac{6}{2}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015}\right) = \frac{\cancel{2}}{2} \times \frac{\cancel{3}}{3} \times \frac{\cancel{4}}{4} \times \cdots \times \frac{2016}{\cancel{2015}} = \frac{2016}{2} = 1008$$

۸- راهبرد روش نمادین



امیر و محمد روی هم از نمایشگاه کتاب ۲۸ جلد کتاب خریدند، اگر امیر ۶ جلد کتاب بیشتر از محمد خریده باشد، هر کدام از آن‌ها چند جلد کتاب خریده‌اند؟



اگر تعداد کتاب‌های محمد را \square در نظر بگیریم داریم:

$$\square + 6 = \text{تعداد کتاب‌های امیر}$$

بنابراین:

$$\square + \square + 6 = 28 \Rightarrow 2\square + 6 = 28 \Rightarrow 2\square = 22 \Rightarrow \square = 11$$

در نتیجه محمد، ۱۱ کتاب و امیر $11 + 6 = 17$ کتاب خریده است.

فصل دوم: عددهای صحیح

اعداد صحیح

اعداد صحیح ۳ دسته هستند:

۱- اعداد صحیح مثبت: $1, 2, 3, \dots$

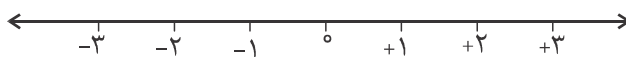
۲- اعداد صحیح منفی: $-1, -2, -3, \dots$

۳- عدد صفر: نه مثبت است و نه منفی



در نوشتن اعداد صحیح مثبت می‌توان علامت (+) را حذف کرد. مثال $4 = +4$ و $21 = +21$

اعداد صحیح به صورت زیر روی محور نمایش داده می‌شوند:



به صورت قراردادی صفر را مبدأ و سمت راست صفر را با اعداد مثبت و سمت چپ را با اعداد منفی، عددگذاری می‌کنیم.

ویژگی‌های محور اعداد

اگر روی محور از سمت چپ به سمت راست حرکت کنیم، اعداد بزرگ‌تر می‌شوند، در واقع در اعداد منفی هر چه از صفر

دورتر شویم مقدار کاهش می‌یابد، برای مثال $-52 < -100$ و $2 < -13$

اگر محور اعداد را از نقطه صفر تا بزنیم هر دو عدد یکسان اما با علامت‌های متفاوت روی هم قرار می‌گیرند که یکی مثبت و دیگری منفی است.



بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد صحیح نامشخص است (نمی‌توان معلوم کرد) اما بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی برابر ۱- و

کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت برابر ۱+ است.



الف) کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از ۹- چیست؟

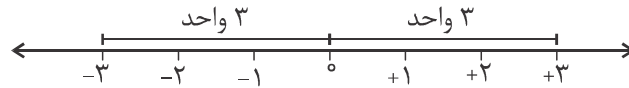
ب) بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از ۲۱- چیست؟



الف) ۸- ب) ۲۲-

قرینه يك عدد صحیح

دو عدد که فاصله آن‌ها از مبدأ با هم برابر است را قرینه یکدیگر گویند، علامت قرینه در ریاضی (-) است. برای مثال با توجه به شکل زیر اعداد +۳ و -۳ قرینه یکدیگرند.



$$-(+3) = -3 \quad -(-3) = 3$$

به همین ترتیب می‌توان گفت اعداد منفی قرینه اعداد مثبت هستند.

برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} -(-43) &= 43 \\ -(+31) &= -31 \end{aligned}$$



۱- قرینه صفر همان صفر است.

۲- قرینه قرینه هر عدد برابر با خود همان عدد می‌باشد.

برای مثال:

$$\begin{aligned} -(-(+7)) &= +7 \\ -(-(-5)) &= -5 \\ -(-a) &= a \end{aligned}$$

۳- هرگاه تعداد قرینه کردن‌های یک عدد، زوج باشد، آن عدد بدون تغییر می‌ماند.

برای مثال:

$$\begin{aligned} \underbrace{-(-(-(-\dots(-(+7))\dots)))}_{54 \text{ بار}} &= +7 \\ \underbrace{-(-(-(-\dots(-(a))\dots)))}_{102 \text{ بار}} &= a \end{aligned}$$

۴- هرگاه تعداد قرینه کردن‌های یک عدد، فرد باشد، آن عدد قرینه خواهد شد.

برای مثال:

$$\begin{aligned} \underbrace{-(-(-\dots(-(+13))\dots))}_{61 \text{ بار}} &= -13 \\ \underbrace{-(-(-\dots(-(a))\dots))}_{101 \text{ بار}} &= -a \end{aligned}$$



۱. مبدأ اعداد صحیح را از صفر به $+۲$ انتقال می‌دهیم. قرینه هر یک از اعداد زیر را به دست آورید.

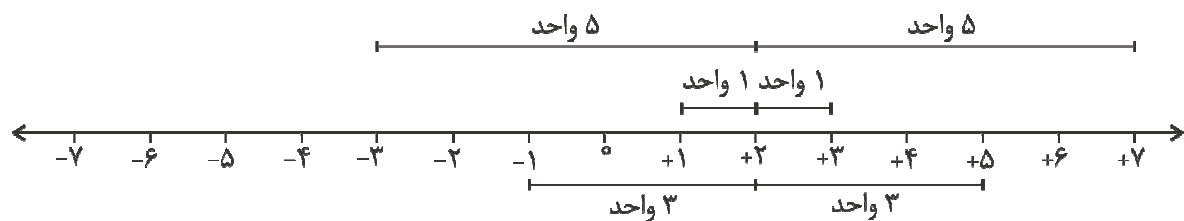
$$-۳ \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$$

$$+۱ \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$$

$$+۵ \xrightarrow{\text{قرینه}} \square$$



از آن جا که مبدأ $+۲$ است، باید محور را از روی $+۲$ تا بزنیم، هر دو عدد که فاصله‌شان تا $+۲$ به یک اندازه است با هم قرینه‌اند. بنابراین:



$$-۳ \xrightarrow{\text{قرینه}} \boxed{+۳}$$

$$+۱ \xrightarrow{\text{قرینه}} \boxed{-۱}$$

$$+۵ \xrightarrow{\text{قرینه}} \boxed{-۵}$$

جمع اعداد صحیح

جمع اعداد صحیح به سه حالت است:

الف) هر دو عدد مثبت باشند:

در این حالت مانند جمع معمولی عمل می‌کنیم و دو عدد را با هم جمع می‌کنیم.

ب) هر دو عدد منفی باشند:

در این حالت دو عدد را بدون در نظر گرفتن علامت، با هم جمع می‌کنیم، علامت حاصل منفی خواهد بود.

ج) یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی باشد:

در این حالت تفاضل دو عدد را به دست می‌آوریم. علامت حاصل، علامت عدد بزرگ‌تر خواهد بود.



$$\text{الف) } (+۴۲) + (+۵) = ۴۲ + ۵ = ۴۷$$

$$\text{ب) } (-۵) + (-۶) = -(۵ + ۶) = -۱۱$$

$$\text{ج) } \begin{cases} (-۹) + (+۶) = -۳ \\ ۹ > ۶ \end{cases}$$

$$\text{ج) } \begin{cases} (+۴۲) + (-۲۵) = +۱۷ \\ ۴۲ > ۲۵ \end{cases}$$

تفریق اعداد صحیح

در تفریق اعداد صحیح می‌توانیم ابتدا تفریق را به جمع تبدیل کنیم، سپس حاصل جمع را به دست آوریم. به این صورت که عدد اول را با قرینه عدد دوم جمع می‌کنیم به طور کلی داریم:

$$a - b = a + (-b)$$



حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (-5) - (-7) &= \\ -8 - 4 - (-7) &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (-5) - (-7) &= -5 + (-(-7)) = -5 + 7 = +2 \\ -8 - 4 - (-7) &= -8 + (-4) + (-(-7)) = -12 + 7 = -5 \end{aligned}$$



حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & -[-(-11) + (-12)] + (-(-9)) = \\ \text{ب)} \quad & -[-(-9) + 5] + (-(+(-11))) = \\ \text{ج)} \quad & -[-(21-14) - (-9-8)] = \end{aligned}$$



$$\text{الف)} \quad -[\cancel{-(-11)} + (-12)] + \cancel{(-(-9))} = -(-1) + (+9) = +10$$

$$\text{ب)} \quad -[\cancel{-(-9)} + 5] + \cancel{(-(+(-11)))} = -14 + 11 = -3$$

$$\text{ج)} \quad -[\cancel{-(21-14)} - (-17)] = -[-7 + 17] = -10$$

با رسم محور حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

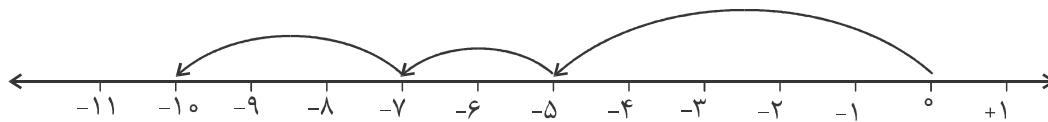
$$-5 - 2 - 3 = ?$$

پس از تبدیل تفریق به جمع داریم:

$$-5 - 2 - 3 = -5 + (-2) + (-3)$$

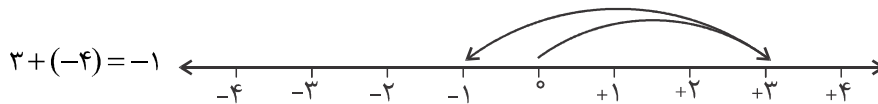
که می‌توان آن را به صورت زیر روی محور نمایش داد:

$$-5 - 2 - 3 = -10$$

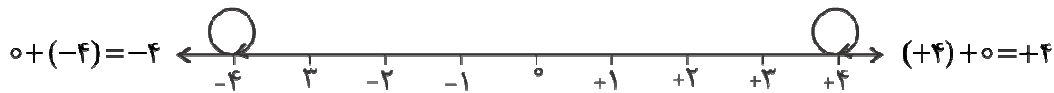


خاصیت‌های جمع

۱- تعویض پذیری (جاب‌جایی): اگر جای دو عدد در جمع تغییر کند، حاصل جمع عوض نمی‌شود.



۲- جمع با صفر (عضو خنثی عمل جمع): حاصل جمع هر عدد با صفر، همان عدد می‌شود.



۳- جمع یک عدد با قرینه‌اش (عضو قرینه): حاصل جمع هر عدد با قرینه‌اش صفر می‌شود.



۴- شرکت پذیری: در جمع سه عدد صحیح یا بیشتر، این که کدام دو عدد را در ابتدا با هم جمع کنیم در حاصل تأثیری

نخواهد داشت، به عبارت دیگر اگر a ، b و c سه عدد صحیح باشند، داریم:

برای مثال:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$[(-3) + 5] + (-4) = (-3) + [5 + (-4)]$$



با استفاده از جدول ارزش مکانی حاصل $23 - 47 - 11$ را به دست آورید.



دهگان	یکان
-۱	-۱
۴	۷
-۲	-۳
۱	۳

$\Rightarrow 10 + 3 = 13$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

برای ضرب و تقسیم دو عدد صحیح ابتدا حاصل را بدون در نظر گرفتن علامت به دست می آوریم، سپس علامت را با توجه به جدول زیر تعیین می کنیم:



÷	+	-
×	+	-
÷	+	-
×	-	+

$$\underbrace{(-3) \times (-7)} = +21 \quad \underbrace{-4 \times (+3)} = -12$$
$$(-) \times (-) = (+) \quad (-) \times (+) = (-)$$

به عبارت دیگر می توان گفت اگر دو عدد هم علامت باشند (هر دو منفی یا هر دو مثبت) حاصل ضرب مثبت می شود و اگر دو عدد علامت متفاوت داشته باشند (یکی مثبت و دیگری منفی) حاصل ضرب منفی می شود.



$$\underbrace{(-5) \times (-11)} + \underbrace{(-7) \times (+8)} = +55 - 56 = -1$$
$$(-) \times (-) = (+) \quad (-) \times (+) = (-)$$

$$\underbrace{[(-63) \div (-9)]} - \underbrace{[42 \div (-6)]} = 7 - (-7) = 7 + 7 = 14$$
$$(-) \div (-) = (+) \quad (+) \div (-) = (-)$$



الف) حاصل ضرب هر عدد صحیح در صفر برابر با صفر است.

ب) تقسیم هر عدد بر صفر تعریف نشده است.

ج) حاصل ضرب هر عدد در ۱ و حاصل تقسیم هر عدد بر ۱ برابر خود آن عدد است.

د) حاصل ضرب هر عدد در -۱ و حاصل تقسیم هر عدد بر -۱ برابر با قرینه آن عدد است.

ه) حاصل تقسیم صفر بر هر عدد صحیح غیر صفر، برابر صفر است.



الف) $(-2) \times 0 = 0$

ب) $\frac{-2}{0}$ تعریف نشده

ج) $(-2) \times 1 = -2$, $\frac{-2}{1} = -2$

د) $\frac{(-2)}{-1} = 2$, $(-2) \times (-1) = 2$

ه) $\frac{0}{-2} = 0$

اولویت عملگرها

در انجام محاسبات ریاضی بر اساس آن چه تاکنون خوانده‌ایم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- پرانتز یا گروه

۲- ضرب و تقسیم از چپ به راست

۳- جمع و تفریق از چپ و راست



حاصل عبارت $6 - 6[5 - (4 - 3)]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۸ (۳) -۱۸ (۴) -۲۰



گزینه «۳» صحیح است.

$$6 - 6[5 - (4 - 3)] = 6 - 6[5 - 1] = 6 - 6 \times 4 = 6 - 24 = -18$$

مثال

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 99 - 100 = ?$

ب) $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \dots + 58 - 60 = ?$

ج) $(2 - 35)(3 - 35)(4 - 35) \dots (50 - 35) = ?$

پاسخ

الف) کافی است دو تا دو تا دسته بندی کنیم، داریم:

$$\overset{-1}{(1-2)} + \overset{-1}{(3-4)} + \overset{-1}{(5-6)} + \dots + \overset{-1}{(99-100)} = 50 \times (-1) = -50$$

ب)

$$\overset{-2}{(2-4)} + \overset{-2}{(6-8)} + \overset{-2}{(10-12)} + \dots + \overset{-2}{(58-60)} = 15 \times (-2) = -30$$

دقت کنید از ۲ تا ۶۰، ۳۰ عدد زوج داریم که آن‌ها را دوتا دوتا دسته بندی کرده ایم بنابراین ۱۵ دسته داریم.

ج)

$$(2-35)(3-35)(4-35) \dots \overset{\circ}{(35-35)} \dots (50-35) = 0$$

ساده کردن کسرها

برای ساده کردن کسرها ابتدا علامت صورت را معلوم می کنیم، سپس علامت مخرج کسر را معلوم می کنیم و در نهایت وقتی علامت کل کسر معلوم شد، اعداد را بدون در نظر گرفتن علامت ساده می کنیم.

مثال

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{+22 \times (-45)}{(+99) \times (-10)}$$

پاسخ

از آن جا که علامت صورت منفی و علامت مخرج نیز منفی است، علامت کل عبارت مثبت خواهد بود.

$$\frac{+22 \times (-45)}{(+99) \times (-10)} = \frac{\overset{1}{\cancel{22}} \times \overset{1}{\cancel{45}}}{\overset{1}{\cancel{99}} \times \overset{1}{\cancel{10}}} = 1$$



دمای جسمی پس از ۱۳ درجه سرد شدن به ۱۷- درجه رسیده است، دمای اولیه این جسم چقدر بوده است؟



$$\text{دمای اولیه جسم } -4 = (-17) + 13 = (-17) - (-13)$$

به دست آوردن مجموع اعداد متوالی با فاصله‌های یکسان

$$\text{تعداد اعداد} \times \frac{(\text{عدد اول} + \text{عدد آخر})}{2} = \text{مجموع اعداد متوالی با فاصله‌های یکسان}$$

که تعداد اعداد را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$1 + \frac{(\text{عدد اول} - \text{عدد آخر})}{\text{فاصله بین اعداد}} = \text{تعداد اعداد}$$

*تذکر: برای استفاده از فرمول مجموع باید همه اعداد هم‌علامت باشند.



حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 44$$



$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 44 = \frac{(44 + 2) \times 11}{2} = \frac{46 \times 11}{2} = 253$$

فصل سوم: جبر و معادله

معادله

یک تساوی جبری که به ازای یک یا چند مقدار به جای متغیرش برقرار شود را معادله می‌نامند. مانند:

$$3x - x = 27 \quad \text{یا} \quad 12x + 9y = 0 \quad \text{یا} \quad 8x - 4 = 2x + 6$$

جواب معادله

مقادیری از متغیرها که به ازای آن‌ها، معادله به یک تساوی درست تبدیل می‌شود را جواب معادله می‌گویند.

تذکر: به متغیری که می‌خواهیم مقدار آن را در معادله پیدا کنیم، مجهول می‌گوییم.



آیا $x = -1$ جواب معادله $4x - 7 = 4x - 6$ است؟



با قرار دادن $x = -1$ در معادله خواهیم داشت:

$$\text{طرف راست معادله} = 4x - 7 = 4 \times (-1) - 7 = -4 - 7 = -11$$

$$\text{طرف چپ معادله} = x \cdot x - 6x = (-1) \times (-1) - 6 \times (-1) = +1 + 6 = +7$$

دو طرف معادله به ازای $x = -1$ برابر نیستند، بنابراین $x = -1$ جواب معادله نیست.

حل معادله

برای حل معادله باید معادله را به گونه‌ای بنویسیم که مجهول‌ها (متغیر) در یک طرف تساوی و مقادیر عددی (ثابت) در طرف دیگر تساوی قرار داشته باشند. برای این کار از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) به دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار مساوی را اضافه کرد.

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

(۲) از دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار مساوی را کم کرد.

$$a = b \Rightarrow a - c = b - c$$

(۳) دو طرف یک تساوی را می‌توان در یک عدد غیر صفر ضرب کرد.

$$a = b, \quad c \neq 0 \Rightarrow ac = bc$$

(۴) دو طرف تساوی را می‌توان بر یک عدد غیر صفر تقسیم کرد.

$$a = b, \quad c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } -8 - \frac{5}{75}x = 28$$

$$\text{ب) } -4m - 4 = -32 + 3m$$

پاسخ

$$-8 - \frac{5}{75}x = 28 \Rightarrow -\cancel{8} - \frac{5}{75}x + \cancel{8} = 28 + 8 \quad \text{الف)}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{75}x = 36 \Rightarrow x = -\frac{36}{\frac{5}{75}} = -48$$

$$-4m - 4 = -32 + 3m \Rightarrow -\cancel{4}m - 4 - \cancel{3}m = -32 + \cancel{3}m - \cancel{3}m \quad \text{ب)}$$

$$\Rightarrow -7m - 4 = -32 \Rightarrow -7m - 4 + 4 = -32 + 4 \Rightarrow -7m = -28 \Rightarrow m = 4$$

حل معادله‌های کسری

در حل معادله‌های کسری می‌توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد:

۱) روش طرفین وسطین:

مثال

$$-\frac{3}{4} = \frac{3x-7}{8} \Rightarrow \frac{-11}{4} = \frac{3x-7}{8} \Rightarrow -11 \times 8 = (3x-7) \times 4 \Rightarrow -88 = 12x - 28$$

$$\Rightarrow 12x = -60 \Rightarrow x = -\frac{60}{12} = -5$$

۲) ضرب طرفین معادله در مخرج مشترک کل مخرج‌ها:

مثال

$$\text{معادله } \frac{3x-2}{2} - 4 = \frac{1}{3} \text{ را حل کنید.}$$

پاسخ

$$6 \times \left(\frac{3x-2}{2} - 4 \right) = 6 \times \frac{1}{3} \Rightarrow 3(3x-2) - 6 \times 4 = 2$$

$$\Rightarrow 9x - 6 - 24 = 2 \Rightarrow 9x - 30 = 2 \Rightarrow 9x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{9}$$

تشکیل معادله برای مسائل مختلف



اگر علی با پولش برای دوستانش بستنی ۳۲۰ تومانی بخرد، ۲۰۰ تومان زیاد می‌آورد و اگر برای آن‌ها بستنی ۴۰۰ تومانی بخرد، ۲۰۰ تومان کم می‌آورد. تعداد دوستان او چند نفر است؟



اگر تعداد دوستان او را X در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} 320X + 200 &= 400X - 200 \\ \Rightarrow 80X &= 400 \Rightarrow X = \frac{400}{80} = 5 \end{aligned}$$



مجموع پنج عدد صحیح متوالی -60 است، کوچک‌ترین این عددها را بیابید.



اگر کوچک‌ترین این عددها را X در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} X + (X+1) + (X+2) + (X+3) + (X+4) &= -60 \\ \Rightarrow 5X + 10 &= -60 \Rightarrow 5X = -70 \Rightarrow X = -14 \end{aligned}$$



محیط مستطیلی که طول آن $\frac{5}{2}$ برابر عرض آن است، ۹۸ می‌باشد. مساحت مستطیل چقدر است؟



$$\begin{aligned} \text{طول: } \frac{5}{2}X \text{ و عرض: } X \\ 2\left(X + \frac{5}{2}X\right) &= 98 \Rightarrow 2X + 5X = 98 \Rightarrow 7X = 98 \\ \Rightarrow X &= 14 \text{ عرض} \\ \text{طول} &= \frac{5}{2} \times 14 = 35 \\ \text{مساحت مستطیل} &= 35 \times 14 = 490 \end{aligned}$$

مثال 

زهرا ۱۷ سال و برادرش علی ۷ سال دارد. چند سال دیگر سن زهرا ۲ برابر سن برادرش می‌شود؟

پاسخ 

فرض کنیم پس از x سال چنین اتفاقی رخ دهد. در آن زمان زهرا $17 + x$ سال و علی $7 + x$ سال دارد.

$$17 + x = 2(7 + x) \Rightarrow 17 + x = 14 + 2x \Rightarrow x = 3$$

مثال 

مجموع $\frac{2}{3}$ عددی با $\frac{5}{4}$ همان عدد و خود آن عدد ۷۰ می‌باشد. آن عدد چند است؟

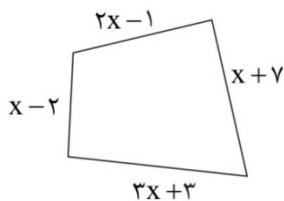
پاسخ 

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}x + x = 70 \Rightarrow \frac{8x + 15x + 12x}{12} = 70$$

$$\Rightarrow \frac{35x}{12} = 70 \Rightarrow x = 70 \times \frac{12}{35} = 24$$

مثال 

محیط شکل زیر ۲۸ است. طول اضلاع این شکل را به دست آورید.



پاسخ 

$$2x - 1 + x - 2 + 3x + 3 + x + 7 = 28 \Rightarrow 7x + 7 = 28$$

$$\Rightarrow 7x = 28 - 7 = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} = 3$$

طول اضلاع برابر است با: ۱, ۵, ۱۰, ۱۲

فصل چهارم: هندسه و استدلال

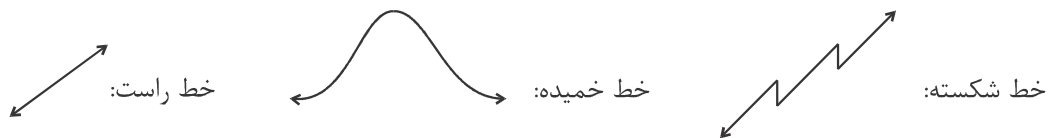
روابط بین پاره خطها

نقطه: نقطه در ریاضی جزء مفاهیم تعریف نشده است و در اصطلاح اثر مداد روی کاغذ را نقطه می‌گوییم. نقطه را معمولاً با یک حرف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم.

A.

خط: از کنار هم قرار گرفتن بی‌نهایت نقطه، خط تشکیل می‌شود. خط دارای ابتدا و انتها نمی‌باشد و از دو طرف نامحدود است.

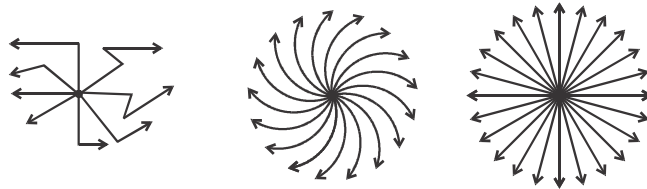
انواع خط:



تذکره: دو سر خط را با حروف کوچک انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند. گاهی خط را با یک حرف کوچک نیز نشان می‌دهند.



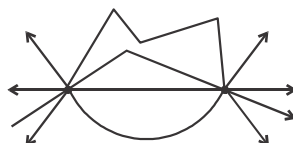
(۱) از یک نقطه بی‌شمار خط می‌گذرد.



(۲) از دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد.

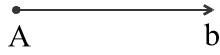


(۳) از دو نقطه بی‌شمار خط می‌گذرد.

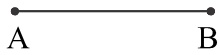


نیم خط: به قسمتی از یک خط که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود باشد، نیم خط می‌گوییم.

برای نام‌گذاری نیم خط سر بسته آن را با حرف بزرگ و سر باز آن را با حرف کوچک نام‌گذاری می‌کنیم. مانند نیم خط Ab .



پاره خط: به قسمتی از خط که بین دو نقطه قرار داشته باشد پاره خط می‌گوییم. دو سر پاره خط بسته است بنابراین دو سر آن را با حروف بزرگ نام‌گذاری می‌کنیم. مانند پاره خط AB .



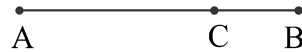
تذکره: اندازه پاره خط AB را با \overline{AB} نمایش می‌دهیم.

جمع و تفریق پاره خطها

دو یا چند پاره خط که در امتداد یکدیگر باشند را می‌توان با هم جمع کرد یا با توجه به اندازه آن‌ها، آن‌ها را از هم کم کرد.

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BC}$$



توجه کنید که $\overline{AB} = \overline{BA}$.



با توجه به شکل جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $(\overline{AC} + \overline{CD}) - \overline{AB} = \dots$

ب) $\overline{AB} + \dots + \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{BC}$

ج) $\dots - \overline{CD} = \overline{DE}$



الف) $\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{BD}$

ب) $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{BC}$

ج) $\overline{CE} - \overline{CD} = \overline{DE}$

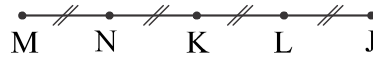
مثال

با توجه به شکل در جاهای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $\overline{MN} = \dots \overline{ML}$

ب) $\overline{NL} = \dots \overline{NJ}$

ج) $\overline{ML} = \dots (\overline{NJ} - \overline{NK})$



پاسخ

الف) $\overline{MN} = \frac{1}{3} \overline{ML}$

ب) $\overline{NL} = \frac{2}{3} \overline{NJ}$

ج) $\overline{ML} = \frac{3}{2} (\overline{NJ} - \overline{NK})$

نکته

اگر n نقطه را روی یک خط در نظر بگیریم، تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطهای روی آن خط از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

تعداد نیم‌خطها $= 2n$

تعداد پاره‌خطهای روی یک خط $= \frac{n(n-1)}{2}$

مثال

روی یک پاره‌خط ۶ نقطه قرار داده‌ایم، چند پاره‌خط به وجود آمده است؟

پاسخ

تعداد نقطه‌ها برابر با $8 = 6 + 2$ است. بنابراین:

$$\text{تعداد پاره‌خطها} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

نکته

در هر مثلث مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

مثال

با کدامیک از اندازه‌های داده شده می‌توان مثلث ساخت؟

۸ ، ۵ ، ۳ (۲)

۱۷ ، ۸ ، ۷ (۱)

۳ ، ۴ ، ۶ (۴)

۷ ، ۲ ، ۴ (۳)

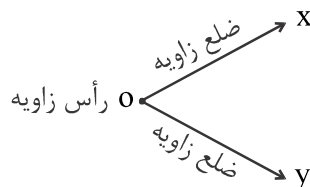
پاسخ

گزینه «۴» صحیح است

زیرا مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

روابط بین زاویه‌ها

زاویه: به بخشی از صفحه که به وسیله دو نیم‌خط با سر مشترک محدود شده باشد، زاویه می‌گوییم.



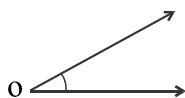
زاویه را می‌توان فقط با حرف رأس آن مشخص کرد، مانند زاویه \hat{O} ، زاویه را می‌توان با سه حرف نیز نام‌گذاری کرد، که در این حالت باید توجه کرد، حرف رأس باید وسط باشد، مانند زاویه $X\hat{O}Y$ یا $Y\hat{O}X$.

نکته

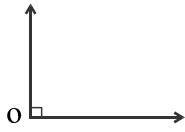
توجه کنید که با تغییر اندازه اضلاع زاویه، اندازه زاویه تغییر نمی‌کند.

انواع زاویه‌ها:

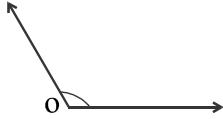
(۱) زاویه تند (حاده): زاویه‌ای که اندازه آن از صفر درجه بیشتر و از 90° کمتر باشد.



۲) زاویه راست (قائمه): زاویه‌ای که اندازه آن 90° است.



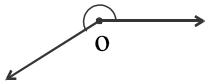
۳) زاویه باز (منفرجه): زاویه‌ای که اندازه آن از 90° بیشتر و از 180° کمتر باشد.



۴) زاویه نیم‌صفحه: زاویه‌ای که اندازه آن 180° باشد.



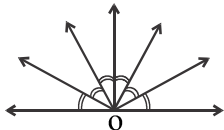
۵) زاویه مقعر (کاو): زاویه‌ای که اندازه آن از 180° بیشتر و از 360° کمتر باشد.



۶) زاویه محدب (کوژ): زاویه‌ای که اندازه آن از 180° کمتر باشد.

مثال

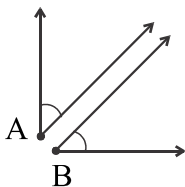
در شکل زیر زاویه‌های مشخص شده برابرند، چند زاویه قائمه در این شکل وجود دارد؟



پاسخ

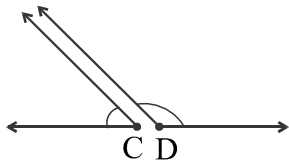
چهار زاویه قائمه

دو زاویه متمم: دو زاویه را متمم گوئیم هرگاه مجموع اندازه‌های آن‌ها 90° باشد.



$$\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} \text{ و } \hat{B} \text{ متمم هستند.}$$

دو زاویه مکمل: دو زاویه را مکمل گوئیم، هرگاه مجموع اندازه‌های آن‌ها 180° باشد.



$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} \text{ و } \hat{D} \text{ مکمل هستند.}$$



مکمل زاویه‌ای ۶ برابر متمم آن زاویه است، آن زاویه چند درجه است؟



توجه کنید که اختلاف متمم و مکمل هر زاویه 90° است.

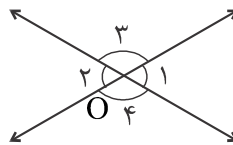
اگر متمم زاویه را x در نظر بگیریم، مکمل آن $6x$ است و $6x - x = 5x$ برابر با 90° است، در نتیجه:

$$5x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ \text{ اندازه‌ی زاویه}$$

دو زاویه متقابل به رأس: دو زاویه که در رأس مشترک و اضلاع آن‌ها در امتداد یکدیگرند را متقابل به رأس می‌گوئیم.

اندازه‌ی دو زاویه‌ی متقابل به رأس همواره با هم برابر است.



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_3, \quad \hat{O}_2 = \hat{O}_4$$



دو زاویه‌ی متقابل به رأس، متمم یکدیگرند. مکمل آن‌ها چند درجه است؟



$$\text{اندازه هر یک از زاویه‌ها } 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

$$\text{اندازه مکمل آن‌ها } 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

مثال

اندازه یک زاویه ۲ برابر متمم آن است. $\frac{4}{5}$ این زاویه چند درجه است؟

پاسخ

اگر اندازه این زاویه را x در نظر بگیریم:

$$x + \frac{x}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{3x}{2} = 90^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\frac{4}{5} \times 60^\circ = 48^\circ$$

نکته

اگر مجموع و اختلاف دو زاویه را داشته باشیم، اندازه‌ی آن دو زاویه از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\text{اندازه زاویه بزرگتر} = \frac{\text{اختلاف دو زاویه} + \text{مجموع دو زاویه}}{2}$$

$$\text{اندازه زاویه کوچکتر} = \frac{\text{اختلاف دو زاویه} - \text{مجموع دو زاویه}}{2}$$

مثال

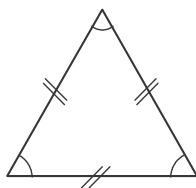
اگر اختلاف دو زاویه مکمل 32° باشد، اندازه زاویه‌ی بزرگتر چند درجه است؟

پاسخ

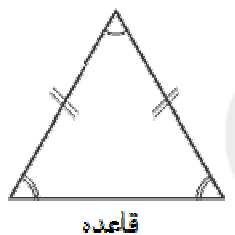
$$\text{اندازه زاویه بزرگتر} = \frac{180^\circ + 32^\circ}{2} = 106^\circ$$

انواع مثلث

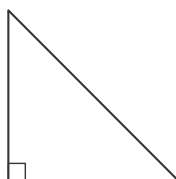
مثلث متساوی‌الاضلاع: سه ضلع مساوی دارد و اندازه‌ی هر زاویه داخلی آن 60° است.



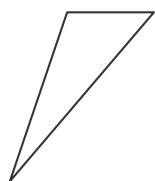
مثلث متساوی الساقین: دو ضلع برابر دارد، که به آن‌ها ساق‌های مثلث می‌گوییم و در این مثلث اندازه‌ی زاویه‌های مجاور به قاعده با هم مساوی است.



مثلث قائم‌الزاویه: مثلثی که یک زاویه 90° داشته باشد.



مثلث مختلف‌الاضلاع: اندازه هیچ یک از ضلع‌ها و زاویه‌های آن برابر نیست.



مثال

کدام یک از مثلث‌های زیر را می‌توان رسم کرد؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع با یک زاویه باز
- (۲) مثلث متساوی‌الاضلاع با یک زاویه قائمه
- (۳) مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه باز
- (۴) مثلث قائم‌الزاویه با زاویه باز

پاسخ

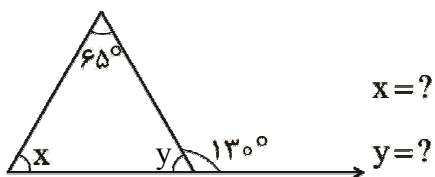
گزینه «۳» صحیح است.
مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه باز را می‌توان رسم کرد.

نکته

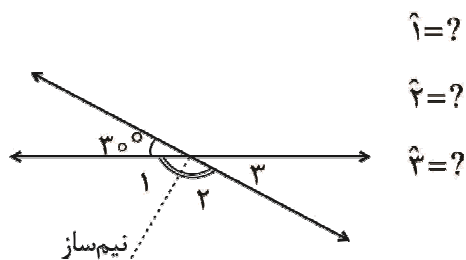
- (۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.
- (۲) اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.

مثال

اندازه زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.



(الف)



(ب)

پاسخ

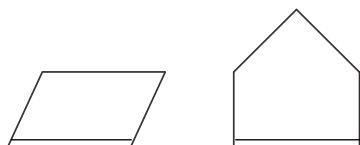
$$\text{الف) } y = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - (50^\circ + 65^\circ) = 65^\circ$$

$$\text{ب) } \hat{3} = 30^\circ \Rightarrow \hat{1} + \hat{2} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \Rightarrow \hat{1} = \hat{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

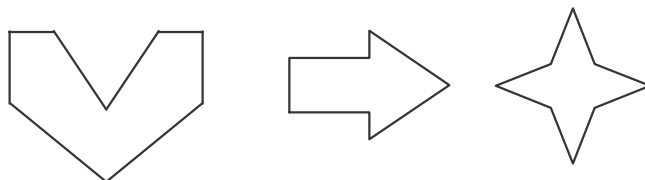
انواع چندضلعی‌ها

چندضلعی‌های محدب (کوژ): چندضلعی که هیچ یک از زاویه‌های داخلی آن بزرگ‌تر از 180° نباشند، چندضلعی محدب

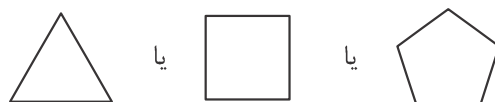
یا کوژ گویند. مانند:



چندضلعی مقعر (کاو): چندضلعی که حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از 180° داشته باشد، چندضلعی مقعر یا کاو نام دارد.



چندضلعی منتظم: چندضلعی که اندازه تمام ضلع‌ها و زاویه‌های آن با هم برابر باشد را چندضلعی منتظم می‌گوییم.



نکته

۱. در چندضلعی منتظم هر چه تعداد ضلع‌ها بیشتر شود، اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی آن‌ها بیشتر می‌شود.
۲. تنها سه ضلعی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع است و تنها چهارضلعی منتظم، مربع است.

مثال

کدام یک از چندضلعی‌های زیر کاوا است؟

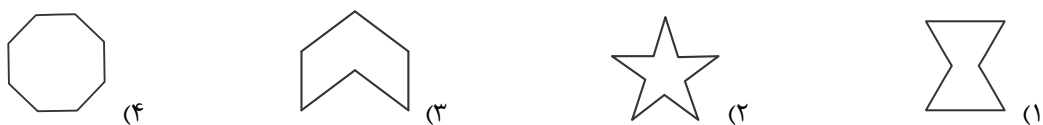


پاسخ

گزینه «۲» صحیح است.
زیرا این چندضلعی حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از 180° دارد.

مثال

کدام یک از چندضلعی‌های زیر منتظم است؟



پاسخ

گزینه «۴» صحیح است.
زیرا در این چندضلعی اندازه تمام ضلع‌ها و زاویه‌های آن با هم برابرند.

نکته

۱. مجموع زاویه‌های داخلی هر چند ضلعی با n رأس برابر است با: $(n-2) \times 180^\circ$
۲. اندازه هر زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم با n رأس برابر است با: $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$



اندازه هر زاویه داخلی یک ۱۲ ضلعی منتظم را بیابید.



$$\frac{(12-2) \times 180}{12} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{30}} \times \cancel{180}^{\cancel{5}}}{\cancel{12}^{\cancel{1}}} = 150^\circ$$

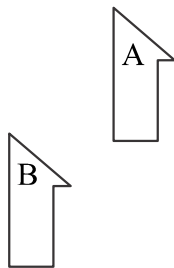
تبدیلات هندسی

انواع تبدیلات هندسی عبارتند از:

۱) انتقال: در انتقال فقط جابجایی صورت می‌گیرد و انتقال، اندازه‌ها و جهت شکل را حفظ می‌کند. یعنی جهت زاویه‌ها در انتقال تغییر نمی‌کند.



شکل B، انتقال یافته شکل A است.

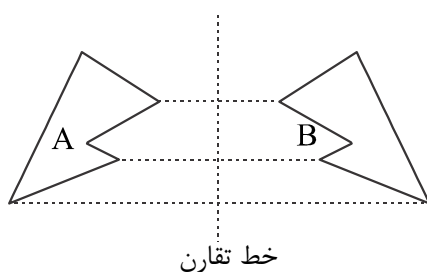


۲) تقارن: تقارن، اندازه‌ها و طول پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند ولی جهت شکل را حفظ نمی‌کند. به عبارت دیگر شکل حاصل از تقارن، شکلی برابر با شکل اولیه است ولی ممکن است هم‌جهت با شکل اولیه نباشد. تقارن به دو نوع است:

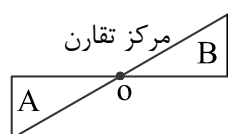
الف) تقارن محوری

ب) تقارن مرکزی

تقارن محوری: در تقارن محوری شکل نسبت به یک خط، قرینه می‌شود. مانند:



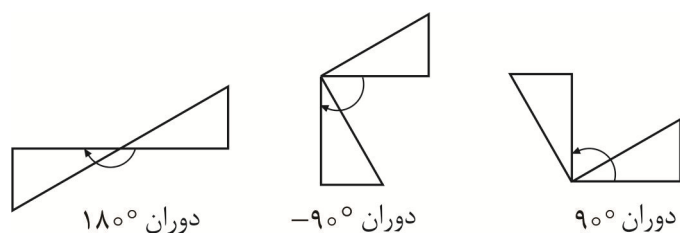
تقارن مرکزی: در تقارن مرکزی شکل نسبت به یک نقطه، قرینه می‌شود.



۳ دوران: در دوران اندازه‌ها تغییر نمی‌کند ولی جهت شکل تغییر پیدا می‌کند.



در دوران، مرکز دوران ثابت است و تغییر نمی‌کند. اگر دوران در جهت عقربه‌های ساعت باشد، اندازه زاویه دوران را منفی و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، اندازه زاویه دوران را مثبت در نظر می‌گیریم.



۱. دوران -180° و 180° یک تصویر را ایجاد می‌کند. بنابراین در دوران 180° لازم نیست جهت را تعیین کنیم.

۲. دوران 360° همان دوران 0° است.

۳. دوران 180° همان تقارن مرکزی است.

شکل‌های هم‌نهشت

اگر بتوان شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن، دوران) بر شکل دیگر منطبق کرد، می‌گوییم دو شکل با هم، هم‌نهشت یا مساوی هستند.

$$A \cong B$$

اگر دو شکل A و B با هم، هم‌نهشت باشند می‌نویسیم.

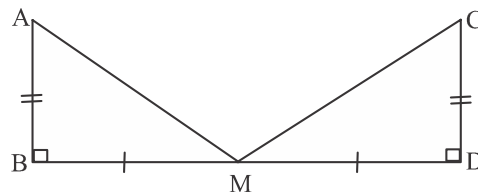


در دو شکل هم‌نهشت اجزای متناظر (زاویه‌ها و ضلع‌ها) دو به دو با هم برابرند.



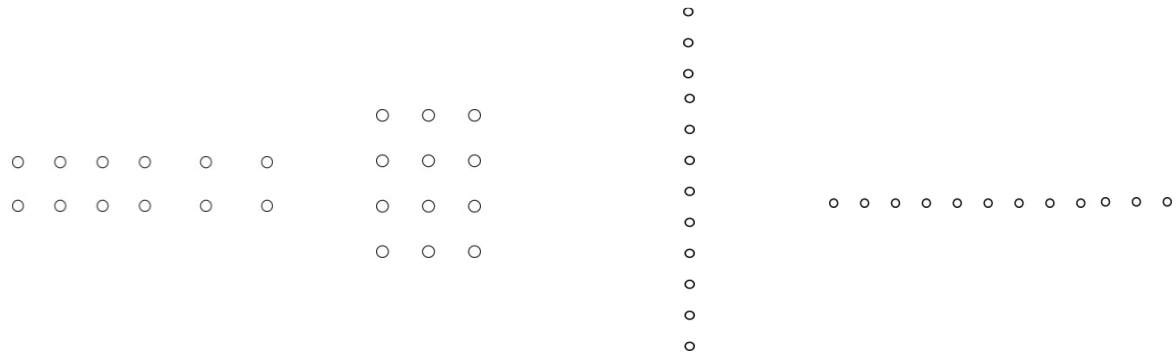
در شکل زیر دو مثلث ABM و CDM هم‌نهشتند. اجزای متناظر آن‌ها دو به دو با هم برابرند.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ AM = CM \\ BM = DM \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right.$$



فصل پنجم: شمارنده‌ها و اعداد اول

فرض کنید یک دسته ۱۲ نفری از سربازها می‌خواهند رژه بروند. تمام آرایش‌های مستطیلی که می‌توان با این ۱۲ نفر تشکیل داد به صورت زیر است:



2×6

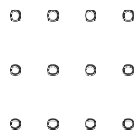
4×3

12×1

1×12



6×2



3×4

مقسوم علیه (شمارنده)

اگر عدد طبیعی a بر عدد b بخش پذیر باشد، b را مقسوم‌علیه (شمارنده) a می‌گوییم. برای مثال ۱۲ شمارنده‌ی ۳۶ است.

در مسئله‌ی رژه ۱۲ سرباز، تعداد حالت‌های ممکن برابر ۶ است که همان تعداد شمارنده‌های عدد ۱۲ می‌باشد. (شمارنده‌های عدد ۱۲ عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲)



شمارنده‌های هر عدد را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول بنویسید.

عدد	شمارنده‌ها			
۹	۱	۳	۹	
۱۵	۱	۳	۵	۱۵
۷	۱	۷		
۱۳	۱	۱۳		

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت:

(۱) عدد ۱ شمارنده‌ی همه‌ی عددهاست.

(۲) کوچک‌ترین شمارنده‌ی هر عدد، ۱ است.

(۳) هر عدد شمارنده‌ی خودش بوده و بزرگ‌ترین شمارنده‌ی هر عدد نیز خودش می‌باشد.

(۴) بعضی از عددها فقط دو مقسوم‌علیه دارند که عبارتند از: یک و خود آن عدد.

عدد اول و مرکب

عدد اول: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که فقط بر ۱ و خودش بخش‌پذیر باشد یک عدد اول است. به عبارت دیگر هر

عدد طبیعی که فقط و فقط دو مقسوم علیه داشته باشد را عدد اول می‌گوییم. مانند ۲، ۳، ۱۷.

عدد مرکب: هر عدد طبیعی که بیش از ۲ مقسوم علیه داشته باشد را عدد مرکب می‌گوییم. مانند ۲۴.



عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

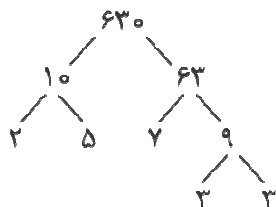
نمودار شمارنده‌های یک عدد

نمودار درختی: یک عدد مانند 63^0 را در نظر بگیرید. دو عدد که حاصل ضرب آن‌ها 63^0 می‌شود، مثلاً 1^0 و 63 را در نظر

می‌گیریم. از 63^0 دو شاخه خارج می‌شود که یکی حاصل تقسیم 63^0 بر 1^0 و دیگری حاصل تقسیم 63^0 بر 63 می‌باشد.

حال همین روند را برای 63 و 1^0 ادامه می‌دهیم تا در انتهای هر شاخه به عددی برسیم که دیگر نتوانیم آن را به صورت

حاصل ضرب دو عدد غیر از ۱ بنویسیم (اعداد اول).



اعدادی که در انتها و در برگ‌ها باقی می‌مانند شمارنده‌های اول عدد می‌باشند.

تجزیه یک عدد به اعداد اول

نوشتن یک عدد به صورت حاصل ضرب چند عدد را «تجزیه» آن عدد می‌گویند.

هر عدد مرکب را می‌توان به اعداد اول تجزیه کرد. برای این منظور، کنار عدد، یک خط می‌کشیم و عدد را بر یکی از اعداد

اول که قابل تقسیم باشد، تقسیم می‌کنیم. اعداد اول را سمت راست خط می‌نویسیم و خارج قسمت را زیر عدد می‌نویسیم.

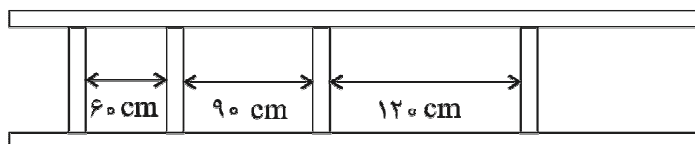
همین عملیات را با خارج قسمت تکرار می‌کنیم تا جایی که به عدد ۱ برسیم.

$$\begin{array}{l|l}
 150 & 2 \\
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$\begin{array}{l|l}
 210 & 2 \\
 105 & 3 \\
 35 & 5 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترك

پدر علی نردبانی قدیمی دارد که تنها ۴ پله از آن باقی مانده است. امروز او به انباری رفت و نردبان کهنه را برای تعمیر به حیاط خانه برد.



او ابتدا فاصله بین پله‌های کهنه را اندازه گرفت. سه فاصله‌ی خالی این نردبان به ترتیب ۶۰، ۹۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر بود. پدر علی می‌خواهد پله‌هایی به این نردبان اضافه کند تا فاصله‌ی بین پله‌های متوالی یکسان شود. فاصله‌ی بین این پله‌ها چه اعدادی می‌تواند باشد؟ کمترین تعداد پله‌هایی که باید اضافه کند چقدر است؟

این فاصله باید مقسوم‌علیه مشترك اعداد ۶۰، ۹۰ و ۱۲۰ باشد. مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۶۰، ۹۰ و ۱۲۰ به صورت زیر است:

$$\text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } 60 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$\text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } 90 = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$

$$\text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } 120 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترك این سه عدد عبارتند از:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

اگر پدر علی بخواهد کمترین تعداد پله‌های لازم را برای تعمیر نردبان به کار برد باید فاصله‌ی بین پله‌ها را بزرگ‌ترین فاصله ممکن انتخاب کند. به عدد ۳۰ در مثال فوق بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترك سه عدد ۳۰ و ۹۰ و ۱۲۰ می‌گویند.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد (یا ب.م.م) a را با b یا (a, b) نمایش می‌دهند.

روش نوشتن مجموعه‌ها برای پیدا کردن ب.م.م روشی بسیار خوب و قابل قبول است اما همیشه برای محاسبه ب.م.م دو عدد کارایی ندارد، زیرا روش‌های دیگر معمولاً سریع‌تر به جواب می‌رسند.

به دست آوردن ب.م.م با استفاده از تجزیه عدد به عوامل اول

ب.م.م دو عدد، حاصل ضرب شمارنده‌های اول مشترک آن دو عدد با کمترین تکرار است.



$$\begin{aligned}(90, 36) &= 18 \\ 90 &= 2 \times 5 \times 3 \times 3 \\ 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ (90, 36) &= 3 \times 3 \times 2 = 18\end{aligned}$$



ب.م.م دو عدد ۷۲ و ۲۷۰ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}72 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ 270 &= 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \\ (270, 72) &= 2 \times 3 \times 3 = 18\end{aligned}$$

دو عدد متباین: اگر دو عدد هیچ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از یک نداشته باشند یعنی ب.م.م آن‌ها یک باشد، آن دو عدد را متباین (یا نسبت به هم اول) می‌گوییم. هر دو عدد اول نسبت به هم اولند.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

مضرب‌های طبیعی یک عدد: اگر عددی را در اعداد طبیعی ضرب کنیم مضرب‌های طبیعی آن عدد به دست می‌آید که به اختصار آن را مضرب‌های آن عدد می‌نامیم.



$$7 \text{ مضارب } = \{7, 14, 21, \dots\}$$



- ۱- کوچک‌ترین و اولین مضرب هر عددی خودش است.
 - ۲- بزرگ‌ترین مضرب یک عدد وجود ندارد زیرا هر عددی بی‌شمار مضرب دارد.
 - ۳- مضرب‌های یک عدد بزرگ‌تر و یا مساوی با خود عدد است.
 - ۴- تمام مضارب یک عدد بر خود آن عدد بخش پذیرند.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد: عددی است که بین مضرب‌های مشترک دو عدد، از همه کوچک‌تر باشد. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد را به‌طور خلاصه با «ک.م.م» نمایش می‌دهند. علامت ریاضی «ک.م.م» به شکل « $[]$ » می‌باشد.

روش‌های به دست آوردن «ک.م.م» دو عدد

- ۱- روش نوشتن مجموعه مضرب‌های طبیعی: در این روش ابتدا مجموعه مضرب‌های دو عدد را می‌نویسیم، سپس مضرب‌های مشترک دو عدد را مشخص کرده و کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

مثال

ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۱۸ را بنویسید.

$$۲۴\text{های} = \{۲۴, ۴۸, ۷۲, ۹۶, ۱۲۰, \dots\}$$

$$۱۸\text{های} = \{۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ۹۰, \dots\}$$

$$۱۸\text{ و }۲۴\text{ مشترک} = \{۷۲, ۱۴۴, \dots\} \Rightarrow \text{ک.م.م } ۲۴, ۱۸ = [۱۸, ۲۴] = ۷۲$$

۲- به دست آوردن ک.م.م با استفاده از تجزیه عدد به عوامل اول: ابتدا دو عدد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. سپس حاصل ضرب عامل‌های اول (مشترک و غیر مشترک) با بیشترین تکرار را به عنوان ک.م.م دو عدد در نظر می‌گیریم.

مثال

فرض کنید می‌خواهیم ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۶۰ را بیابیم، ابتدا آن‌ها را تجزیه و به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول می‌نویسیم:

$$۲۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۶۰ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵$$

در این صورت:

$$[۲۴, ۶۰] = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۱۲۰$$

مثال

ک.م.م دو عدد ۱۸۰ و ۸۴ را بیابید.

$$۸۴ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۷$$

$$۱۸۰ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵$$

$$[۸۴, ۱۸۰] = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۷$$

نکته

۱-

$$\text{ک.م.م} = \frac{\text{حاصل ضرب دو عدد}}{\text{م.م.ب}}$$

۲- «ک.م.م» دو عدد اول، برابر با حاصل ضرب آن دو عدد اول است.

۳- «ک.م.م» دو عدد که یکی مضرب دیگری می‌باشد، برابر با عدد بزرگ‌تر است.

$$\Rightarrow [a, b] = a \text{ اگر } a \text{ مضرب } b \text{ باشد}$$

مثال

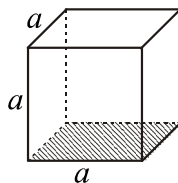
$$۲۸ = ۴ \times ۷ \Rightarrow \text{به دلیل این که } ۲۸ \text{ مضرب } ۷ \text{ است} \Rightarrow [۲۸, ۷] = ۲۸$$

۴- «ک.م.م» هر عدد با خودش، خود همان عدد است.

فصل ششم: سطح و حجم

حجم‌های منشوری: حجم‌هایی هستند که دو قاعده‌ی موازی دارند و مساحت دو قاعده با هم برابر است.

مکعب:



$$\text{حجم } V = a^3$$

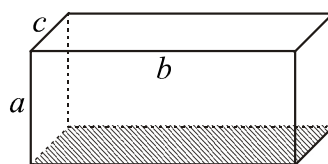
تعداد رأس: ۸

تعداد یال: ۱۲

تعداد وجه: ۶

$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = 4a^2 \\ S_{\text{کل}} = 6a^2 \end{cases}$$

مکعب مستطیل:



$$V = abc$$

$$S_{\text{جانبی}} = 2a(b+c) = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده}$$

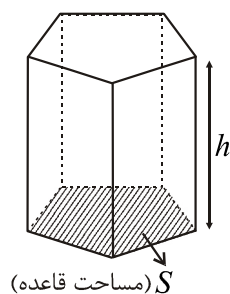
$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}} = 2(ab+bc+ac)$$

تعداد رأس: ۸

تعداد یال: ۱۲

تعداد وجه: ۶

حجم منشور یا قاعده چند ضلعی:



$$S_{\text{جانبی}} = h \times \text{محیط قاعده}$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}}$$

$$V = S \times h$$

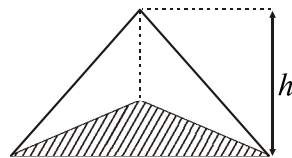
تعداد رأس و یال و وجه منشور در حالت کلی:

$$n = \text{تعداد اضلاع قاعده}$$

تعداد وجه	تعداد یال	تعداد رأس	منشور با قاعده
۶	۱۲	۸	۴ ضلعی
۷	۱۵	۱۰	۵ ضلعی
۸	۱۸	۱۲	۶ ضلعی
۹	۲۱	۱۴	۷ ضلعی
$n+2$	$3n$	$2n$	n ضلعی

حجم‌های هرمی:

هرم با قاعده‌ی ۳ ضلعی:

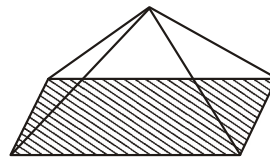


تعداد رأس: ۴

تعداد یال: ۶

تعداد وجه: ۴

هرم با قاعده‌ی ۴ ضلعی:



تعداد رأس: ۵

تعداد یال: ۸

تعداد وجه: ۵

حجم هرم در حالت کلی:

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

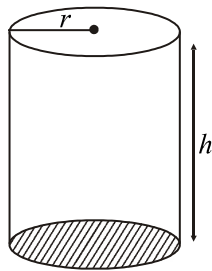
قاعده × h

تعداد رأس و یال و وجه هرم در حالت کلی:

$$n = \text{تعداد اضلاع قاعده}$$

تعداد وجه	تعداد یال	تعداد رأس	هرم با قاعده
۴	۶	۴	۳ ضلعی
۵	۸	۵	۴ ضلعی
۶	۱۰	۶	۵ ضلعی
۷	۱۲	۷	۶ ضلعی
$n+1$	$2n$	$n+1$	n ضلعی

استوانه: استوانه نوعی منشور است با قاعده‌ی دایره



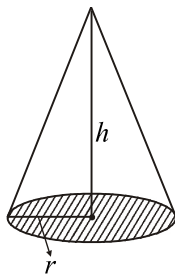
$$V = \pi r^2 h$$

$$\text{شعاع قاعده} = r$$

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2\pi r^2$$

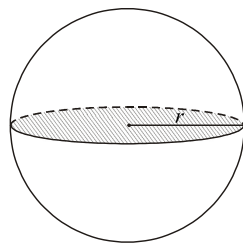
مخروط: مخروط نوعی هرم با قاعده‌ی دایره است.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

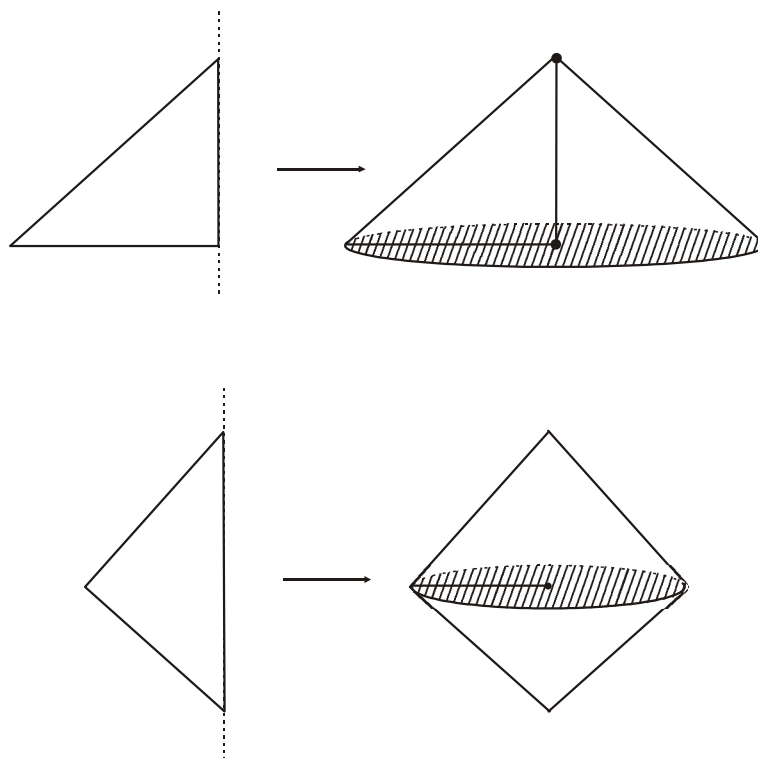
حجم‌های کره:



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S_{\text{کل}} = 4\pi r^2$$

شکل حاصل از دوران یک مثلث حول یکی از اضلاعش، یک یا ترکیبی از دو مخروط است.



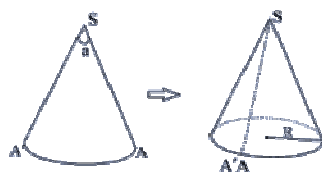
شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاعش استوانه است.

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقمند:

محاسبه‌ی سطح کل مخروط:

رابطه‌ی سطح کل مخروط، هم‌چون حجمش مانند رابطه‌ی سطح کل هرم می‌باشد. در زیر روش به دست آوردن مساحت جانبی مخروط آورده شده است.

هرگاه یک مخروط مانند شکل زیر را باز کنیم تا گسترده گردد، قطاعی از دایره به مرکز S (رأس مخروط) و شعاع I (اندازه‌ی مولد آن) و با اندازه‌ی کمانی مانند a تبدیل می‌شود.



از این رو می‌توان مساحت جانبی مخروط را از تناسب زیر به دست آورد:

$$\begin{array}{l} \text{مساحت} \\ \text{اندازه کمان} \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi I^2 \\ a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} S = \frac{a}{360} \times \pi I^2 \\ S = ? \end{array} \quad (*)$$

از طرفی محیط قاعده‌ی مخروط برابر است با طول کمان AA' و می‌توان طول کمان AA' را از رابطه‌ی $\frac{\pi}{180} \times Ia$ به دست آورد. بنابراین داریم:

$$2\pi R = \frac{\pi}{180} \times Ia \Rightarrow a = \frac{360^\circ R}{I}$$

با جای‌گذاری مقدار a در رابطه‌ی (*) مساحت جانبی مخروط دوار به دست می‌آید:

$$S = \pi RI \quad (\text{مساحت جانبی})$$

و با توجه به آن داریم:

$$S = \pi RI + \pi R^2 \quad \text{مساحت کل}$$



در یک مخروط شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و مولد ۱۵ سانتی‌متر است. حجم، مساحت جانبی و مساحت کل آن را به دست آورید. ($\pi = 3/14$)



ابتدا با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس ارتفاع این مخروط را به دست می‌آوریم:

$$h^2 = I^2 - R^2 \Rightarrow h^2 = 15^2 - 10^2 = 225 - 100 \Rightarrow h^2 = 125 \Rightarrow h = \underline{11/118 \text{ cm}}$$

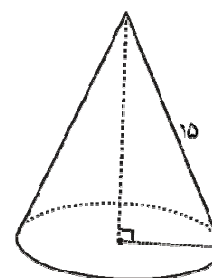
$$A = \pi R^2 = 3/14 \times 10^2 = 3/14 \times 100 = 314 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت قاعده}$$

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h = \frac{3/14 \times 11/18}{3} = 1170/17 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم}$$

$$\text{محیط قاعده} = 2\pi R = 2 \times 3/14 \times 10 = 62/7 \text{ cm}$$

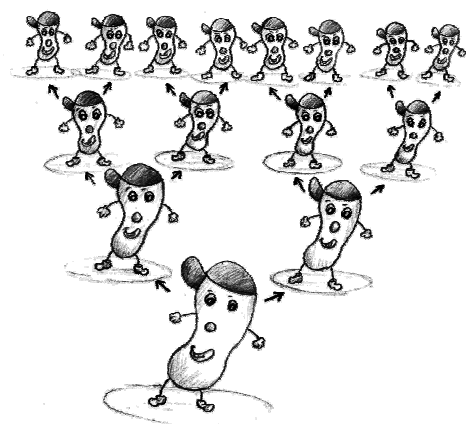
$$S = \pi RI = 3/14 \times 10 \times 15 = 471 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت جانبی}$$

$$S = S + A = 471 + 314 = 785 \text{ cm}^2 \quad \text{مساحت کل}$$



فصل هفتم: توان

در یک آزمایشگاه کشت باکتری روی یک نوع باکتری کار می‌کنند. یک باکتری از این نوع در مرحله‌ی اول به ۲ باکتری تبدیل می‌شود. سپس هر کدام از آن باکتری‌ها به دو باکتری مشابه تبدیل می‌شوند. یعنی در مرحله‌ی دوم ۴ باکتری مشابه باکتری اول خواهیم داشت.



در واقع تعداد باکتری‌ها در هر مرحله مطابق جدول زیر محاسبه می‌شود:

مرحله	۱	۲	۳	۴
تعداد باکتری‌ها	۲	۲×۲	$۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$

در مرحله‌ی پنجم تعداد باکتری‌ها $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ یعنی برابر با ۳۲ خواهد بود. این حاصل ضرب، تکراری از عدد ۲ است که به اختصار آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵$$

عدد ۵ تعداد تکرارهای ۲ را در این حاصل ضرب نشان می‌دهد. در عبارت $۲^۵$ به عدد ۵ توان و به عدد ۲ پایه می‌گوییم.



هر عدد به توان یک، برابر خودش است.
هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر با عدد یک است.
عدد یک به توان هر عددی برابر است با یک.



هر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است.
اگر هر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت می‌شود.

$$(-1)^{۰۰} = ۱$$

$$(-1)^{۰۱} = -۱$$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$(-1)^{100} - 1^{100} = 1 - 1 = 0$$

$$(-1)^{99} - 1^{99} = -1 - 1 = -2$$

مثال

در یک مدرسه‌ی راهنمایی ۳ پایه وجود دارد. هر پایه ۳ کلاس دارد و در هر کلاس ۳ ردیف نیمکت چیده شده است. در هر ردیف ۳ نیمکت وجود دارد. روی هر نیمکت ۳ دانش‌آموز می‌نشیند. اگر هر دانش‌آموز ۳ بار در روز آب بخورد و هر بار به اندازه‌ی ۳ فنجان، آب هدر بدهد، دانش‌آموزان این مدرسه در ۳ روز، چند فنجان آب اسراف می‌کنند؟

پاسخ

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$$

محاسبه‌ی عبارت شامل جمع و تفریق اعداد توان‌دار

ابتدا مقدار هر عدد توان‌دار را محاسبه می‌کنیم سپس با توجه به اولویت اعمال داده شده، مقدار عبارت را حساب می‌کنیم. ترتیب انجام عملیات برای محاسبه‌ی عبارت‌های ریاضی شامل توان:

۱- داخل پرانتز

۲- توان

۳- ضرب و تقسیم

۴- جمع و تفریق

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$1) 4^2 \times 2 + (4 \times 3)^2 \times 3 = 16 \times 2 + 144 \times 3 = 32 + 432 = 464$$

$$2) 15 - 2^2 \div 4 = 15 - 8 \div 4 = 15 - 2 = 13$$

$$3) 5^2 + 5^2 + 5^2 = 375$$

اگر دو یا چند عدد داخل پرانتز با هم جمع یا تفریق شوند نمی‌توانیم آن‌ها را تک تک به توان رسانده و با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 4 & + & 9 = 13 \end{array}$$

برای این کار ابتدا باید ۲ را با ۳ جمع کنیم و سپس به توان برساییم. یعنی:

$$(2+3)^2 = (5)^2 = 25$$

همان‌طور که می‌بینید ۲۵ و ۱۳ با هم برابر نیستند، در مورد تفریق دو عدد نیز به همین صورت است. مجذور (مربع): توان دوم هر عدد را مجذور (یا مربع) آن عدد می‌نامیم. برای مثال مربع عدد ۸، ۶۴ است. مکعب: توان سوم هر عددی را مکعب آن عدد می‌نامیم. مثلاً مکعب ۱۱، ۱۳۳۱ است.

عملیات روی اعداد توان‌دار

الف) ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی:

$$\text{الف) } 3^5 \times 3^2 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{بار ۵}} \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{بار ۲}} = 3^7$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{بار ۲}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{بار ۳}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

در حالت کلی اگر چند عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان در هم ضرب شوند، حاصل ضرب، عددی است توان‌دار با همان پایه و توان آن برابر با مجموع توان‌هاست.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (\text{m و n دو عدد طبیعی هستند.})$$

ب) ضرب دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی:



$$\text{الف) } 2^3 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{بار 3}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{بار 3}} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) = (2 \times 2)^3 = 2^6$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 6^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{بار 2}} \times \underbrace{6 \times 6}_{\text{بار 2}} = \left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \left(\frac{1}{3} \times 6\right) = \left(\frac{1}{3} \times 6\right)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2$$

در حالت کلی اگر چند عدد توان‌دار با توان‌های یکسان در هم ضرب شوند، حاصل ضرب، عددی است توان‌دار با همان توان و پایه‌ی آن، برابر با حاصل ضرب پایه‌ها است.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad (n \text{ عددی طبیعی است.})$$

ج) به توان رساندن یک عدد توان‌دار:



$$\text{الف) } (2^5)^3 = \underbrace{2^5 \times 2^5 \times 2^5}_{\text{بار 3}} = 2^{5+5+5} = 2^{3 \times 5} = 2^{15}$$

$$\text{ب) } \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^4 = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\text{بار 4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+2+2+2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times 4} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

در حالت کلی: $(a^m)^n = a^{mn}$.

اما فرق بین $(5^3)^2$ ، 5^{3^2} چیست؟

در عبارت دوم، ۲ در واقع توان سه است، بنابراین در عبارت دوم ابتدا باید سه را به توان دو برسانیم، در نتیجه عبارت دوم معادل با 5^9 است، ولی عبارت اول 5^6 است.

مقایسه‌ی توان‌ها

فرض کنیم a عددی مثبت و m و n اعدادی صحیح باشند که $m > n$ در این صورت داریم:

* اگر $a > 1$ آن‌گاه $a^m > a^n$.



$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-4} < \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

$$2^{-1} > 2^{-2}$$

$$5^7 > 5^3$$

* اگر $a = 1$ آن‌گاه $a^m = a^n$.

$$1^{-11} = 1^6$$

$$1^{-7} = 1^{-5}$$

$$1^5 = 1^{99}$$

* اگر $a < 1$ آن گاه $a^m < a^n$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

عدد صفر به توان هر عدد مثبت برسد برابر صفر می شود اما 0^m و 0^0 در صورتی که m عددی منفی باشد تعریف نشده است.

ویژه دانش آموزان علاقمند

تقسیم اعداد توان دار

در تقسیم اعداد توان دار، اگر پایه ها برابر و توان ها مختلف باشند، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

($a \neq 0$ عددی دلخواه و n و m اعداد صحیح مثبت)

$$11^6 \div 11^3 = 11^{6-3} = 11^3$$

$$8^9 \div 2^4 = (2^3)^9 \div 2^4 = 2^{27} \div 2^4 = 2^{27-4} = 2^{23}$$

$$5^{12} \div 5^3 = 5^{12-3} = 5^9$$

$$(-4)^6 \div (-4) = (-4)^{6-1} = (-4)^5$$

$$\frac{5^4}{5^7} = \frac{5^4}{5^4 \times 5^3} = \frac{1}{5^3}$$



در تقسیم اعداد توان دار، اگر پایه‌ها متفاوت و توان‌ها برابر باشند، پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم و یکی از توان‌ها را می‌نویسیم.

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

(a, b دو عدد دلخواه و $b \neq 0$ و n عدد صحیح مثبت)



$$42^7 \div 7^7 = \left(\frac{42}{7}\right)^7 = 6^7$$

$$(8/1)^2 \div (0/3)^2 = \left(\frac{8/1}{0/3}\right)^2 = 27^2$$

$$12^6 \div 6^6 = \left(\frac{12}{6}\right)^6 = 2^6$$

$$4^9 \div (-3)^9 = \left(-\frac{4}{3}\right)^9$$



$$\begin{cases} a^n \div a^n = \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1 \\ a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0 \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1 \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$$



در ضرب و تقسیم اعداد توان دار اگر نه پایه و نه توان هیچ کدام مساوی نباشند ($a \neq b, m \neq n$)، قاعده‌ای برای ضرب یا تقسیم وجود ندارد و ساده نمی‌شوند و اگر a, b پس از تجزیه، عامل‌های مشترک داشته باشند، طبق قوانین توان ساده می‌شوند.

تساوی توان‌ها

در تساوی دو عدد توان دار، در صورتی که پایه‌ها مساوی باشند، توان‌ها نیز مساوی‌اند.

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n$$



در صورت وجود عوامل جدا کننده در عبارت‌های توان دار، می‌توانیم جای توان‌ها را عوض کنیم.

اگر a عدد دلخواه و $1, m$ و n سه عدد طبیعی باشند:

$$((a^1)^m)^n = ((a^1)^n)^m = ((a^m)^n)^1 = ((a^m)^1)^n = ((a^n)^m)^1 = ((a^n)^1)^m = a^{n1m}$$

جمع اعداد توان دار با پایه هک مساوی

در این حالت می توان از عددی که توان کوچک تری دارد فاکتور گرفت.

$$a^m + a^{m+1} + \dots + a^{m+n} = a^m(1 + a + a^2 + \dots + a^n)$$



$$\begin{aligned} \frac{4^{25} + 4^{26} + 4^{27} + 4^{28}}{2^{48}} &= \frac{4^{25}(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3)}{2^{48}} = \frac{(2^2)^{25}(1 + 4 + 16 + 64)}{2^{48}} \\ &= \frac{2^{50} \times 85}{2^{48}} = 2^2 \times 85 = 340 \end{aligned}$$

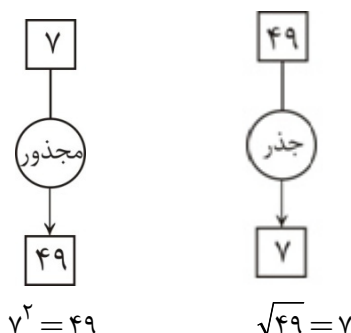
ریشه گیری

جمع و ضرب، دو عمل جبری هستند که هر کدام دارای یک عمل معکوس می باشند. این دو عمل معکوس را که همگی شما می شناسید، تفریق و تقسیم نام دارند. عمل جبری به توان رساندن نیز دارای عمل معکوس است. جستجوی پایه ی توان، ریشه گیری نام دارد. عمل ریشه گیری یا رادیکال را با نماد $\sqrt[n]{m}$ نشان می دهند، که n فرجه رادیکال و m عدد زیر رادیکال نام دارد.

عدد زیر رادیکال $\sqrt[n]{m}$ ← فرجه

n یا فرجه، اعداد طبیعی هستند که از ۲ شروع می شوند. \sqrt{m} را به صورت \sqrt{m} می نویسیم. یعنی عدد ۲ را در قسمت فرجه نمی نویسیم. \sqrt{m} را جذر m می گوئیم. به طور کلی به عدد $\sqrt[n]{m}$ ریشه ی n ام m می گوئیم.

می دانیم $7^2 = 7 \times 7 = 49$. بنابراین ۴۹ توان دوم ۷ است. به عبارت دیگر ۴۹، مجذور عدد ۷ است. ریشه های دوم (جذر) عدد ۴۹ را با $\sqrt{49}$ و $-\sqrt{49}$ نشان می دهیم. یعنی: $\sqrt{49} = 7$ و $-\sqrt{49} = -7$



بعضی از اعداد مجذور کامل هستند. پس جذر آن ها دقیق است. مانند:

$$8 \xrightarrow{\text{مجذور}} 64$$

$$64 \xrightarrow{\text{جذر}} 8$$

$$\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

⋮

بعضی مواقع در یک عبارت عددی، اعداد به تنهایی جذر کامل ندارند ولی حاصل ضرب آن‌ها جذر کامل دارد.

$$\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{(-25) \times (-4)} = \sqrt{+100} = 10$$

گاهی چند رادیکال در زیر یک‌دیگر با علامی مرتبطند، در این گونه مسایل از داخلی‌ترین رادیکال به سمت رادیکال بیرونی حرکت می‌کنیم. در ضمن دقت کنید که اگر عددی پشت رادیکال بود و بین عدد و رادیکال علامتی نبود، منظور علامت ضرب است. همچنین می‌دانید که ضرب نسبت به جمع اولویت دارد و باید اول انجام شود.

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{13 + \sqrt{9}} = \sqrt{13 + 3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{18\sqrt{4}} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{4 + 7\sqrt{81}} = \sqrt{4 + 7\sqrt{9}} = \sqrt{4 + 7 \times 3} = \sqrt{4 + 21} = \sqrt{25} = 5$$

پیدا کردن جذر يك عدد به‌طور تقریبی:

بعضی از اعداد مجذور کامل نیستند. مثلاً $\sqrt{21}$ را در نظر بگیرید. چون ۲۱ بین دو عدد مجذور کامل یعنی ۱۶ و ۲۵ است، پس $\sqrt{21}$ بین $\sqrt{16}$ و $\sqrt{25}$ است. پس جذر عدد ۲۱ دقیق نمی باشد و تقریبی است.



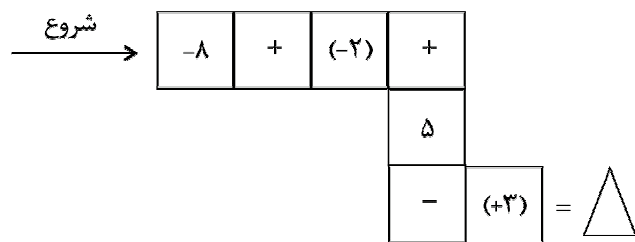
می‌خواهیم $\sqrt{6}$ را حساب کنیم. چون $\sqrt{6}$ بین $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ است پس $\sqrt{6}$ بین ۲ و ۳ است. حدس می‌زنیم $\sqrt{6}$ تقریباً $2/5$ باشد. این عدد را به توان ۲ می‌رسانیم تا میزان تقریبی را با عدد داده شده بسنجیم. سپس در مراحل بعد این تقریب را بهتر می‌کنیم. مربع $2/5$ برابر $6/25$ است که از ۶ بالاتر است. پس حدس می‌زنیم $\sqrt{6}$ تقریباً $2/4$ است. به همین ترتیب جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

حدس	مربع حدس	فاصله با عدد داده شده
۲/۱	۴/۴۱	خیلی زیاد
۲/۲	۴/۸۴	خیلی زیاد
۲/۳	۵/۲۹	زیاد
۲/۴	۵/۷۶	کم
۲/۵	۶/۲۵	زیاد

از این جا متوجه می‌شویم که جذر عدد ۶ تقریباً $2/4$ است.

تمرین

۱. با چهار رقم ۶، ۷، ۳ و ۵ چند عدد چهار رقمی (با تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟
۲. زهرا یک کتاب را در ۵ ساعت مطالعه کرد و ۱۵ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۷۰ صفحه داشته باشد، او به طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟
۳. فرش دایره‌ای شکل به قطر ۶ متر را در وسط یک سالن پهن کرده‌ایم. اگر لبه فرش تا هر طول سالن ۱ متر و تا هر عرض سالن ۲ متر فاصله داشته باشد، مساحت قسمت خالی چقدر است؟
۴. در یک باغ وحش ۵۰ حیوان چهار پا و پرنده وجود دارد. اگر کل پاهای آن‌ها ۱۲۰ تا باشد، چند حیوان چهار پا و چند پرنده در باغ وحش وجود دارد؟
۵. آپارتمانی شامل ۶ طبقه مسکونی، یک طبقه همکف (پارکینگ) و دو طبقه زیرزمین است. اگر آسانسور که هم‌اکنون در طبقه چهارم قرار دارد، ابتدا ۵ طبقه پایین و سپس ۳ طبقه بالا برود در کدام طبقه قرار خواهد گرفت؟
۶. اگر از نقطه شروع محاسبه را آغاز کنیم، چه عددی در داخل مثلث قرار خواهد گرفت؟



۷. دمای هوای شهر یزد ۴ درجه بالای صفر است و دمای هوای شهر میبد ۶ درجه گرم‌تر از شهر یزد می‌باشد، میانگین دمای دو شهر چند درجه است؟
۸. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $-۳ - ۲ \times [۴ - (۱۲ - ۷)]$

ب) $۲ \times [(۷ - ۱۶) + ۳] - (۴ - ۹) - (۹ - ۱۰)$

پ) $-(-(-۵ - ۱۲) - (-۷ + ۱۴)) - (۲۷ - ۳۵)$

ت) $[(-۱۲) \times (+۲)] \div (-۴۸)$

ث) $[-۶ - (+۲۲)] \times [(-۳۶) \div (-۹)]$

ج) $\frac{(-۴۹) \times (-۶۵)}{(+۱۳) \times (-۳۵)}$

چ) $\frac{(-۵) \times ۹۱ \times (-۵۱)}{۳۹ \times (-۸۵)}$

۹. عبارت جبری زیر را ساده کنید و مقدار عددی آن را برای $x = ۳$ و $y = -۲$ به دست آورید.

$$\frac{1}{۲}(۴x - ۲y + ۶) - (۳x - ۲y + ۴)$$

۱۰. در هر یک از الگوهای زیر، جمله n ام را مشخص کنید.

الف) $۴, ۱۶, ۶۴, ۲۵۶, \dots$

ب) $۱۰, ۲۱, ۳۲, ۴۳, \dots$

ج) $۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, \dots$

۱۱. جواب معادله $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} = 1$ را به دست آورید.

۱۲. اندازه زاویه‌های یک چهارضلعی $x, 2x, 3x$ و $4x$ است. اندازه زاویه بزرگ‌تر را به دست آورید.

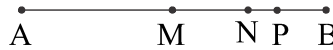
۱۳. مجموع زاویه‌های داخلی کدام چندضلعی برابر 1440° است؟

۱۴. اگر M وسط پاره‌خط AB و N وسط MB و $\frac{NP}{PB} = \frac{1}{2}$ باشد. جاهای خالی را کامل کنید.

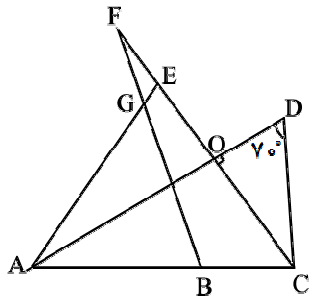
الف) $\frac{AM}{2} - PB = \dots MP$

ب) $\frac{3}{2}PB + \dots MN = AM$

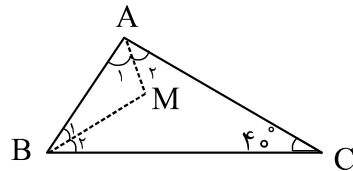
ج) $PB = \frac{1}{6} \dots$



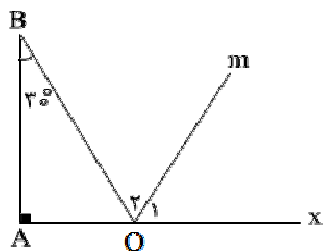
۱۵. در شکل زیر $\triangle AGB$ متساوی‌الاضلاع است و پاره‌خط‌های AD و AC با یکدیگر برابرند. زاویه \hat{F} چند درجه است؟



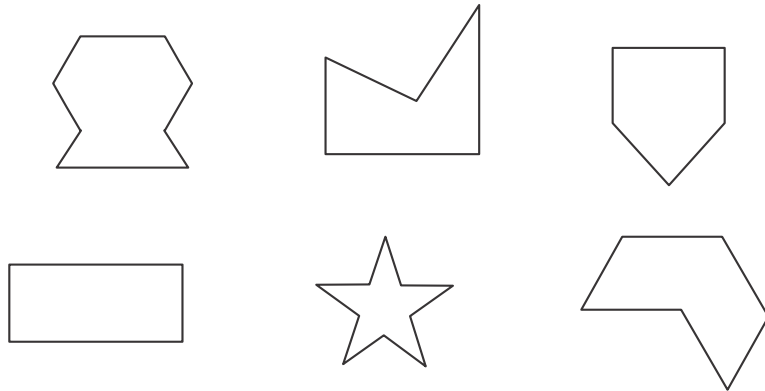
۱۶. AM و BM نیم‌سازهای زاویه‌های A و B هستند. اندازه \hat{BMA} چقدر است؟



۱۷. نسبت زاویه O_1 به زاویه O_2 برابر $\frac{2}{3}$ است. زاویه \hat{BOM} چند درجه است؟



۱۸. کدام چندضلعی محدب و کدام مقعر است؟



۱۹. کدام گزینه درست و کدام نادرست است؟

(الف) در انتقال، اندازه‌ی اضلاع تغییر می‌کند.

(ب) دوران ۹۰ درجه نسبت به یک نقطه، همان قرینه نسبت به نقطه است.

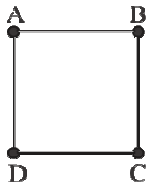
(ج) انتقال مساحت را ثابت نگه می‌دارد.

(د) تقارن نسبت به یک خط، مساحت را تغییر نمی‌دهد.

(ه) تقارن نسبت به یک نقطه، جهت شکل را تغییر می‌دهد.

۲۰. در مربع ABCD که مطابق شکل زیر رسم شده است، رأس D را نسبت به نقطه‌ی O که محل برخورد قطرهاست، یک

دوران ۹۰ درجه ساعتگرد سپس یک دوران ۱۸۰ درجه می‌دهیم. به کدام نقطه می‌رسیم؟



۲۱. الف) شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای ۴ و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است، حجم آن را به‌دست آورید.

(ب) ستونی است به شکل منشور ۶ پهلو که هر ضلع قاعده‌اش $\frac{5}{2}$ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهند بدنه‌ی این

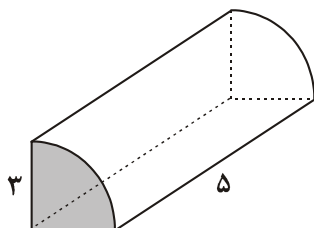
ستون را کاشی بچسبانند، چند متر کاشی لازم است؟

۲۲. الف) منشور قاعده دارد و بدنه‌ی منشور از چند مستطیل یا تشکیل شده است.

(ب) قاعده‌ی یک منشور سه‌پهلو، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های قائم آن ۵ و ۴ سانتی‌متر است. اگر ارتفاع این

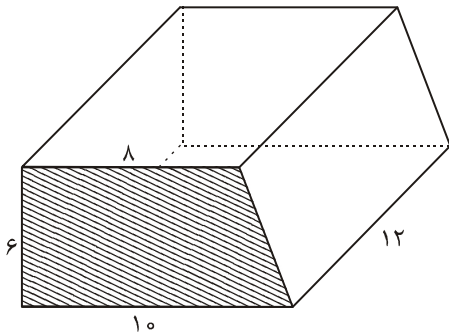
منشور ۸ سانتی‌متر باشد، حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟

۲۳. حجم شکل زیر را به‌دست آورید. (قاعده‌ی شکل $\frac{1}{4}$ دایره است.)



۲۴. حجم استوانه‌ای را پیدا کنید که قطر قاعده‌ی آن ۱۰ متر و ارتفاع آن ۶ متر باشد.

۲۵. حجم شکل زیر را به دست آورید.



۲۶. طول و عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۹، ۳ و ۲ متر است. می‌خواهند کف و دیوارهای این استخر را رنگ کنند. اگر

برای هر مترمربع ۴/۰ کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر چند کیلوگرم رنگ لازم است؟

۲۷. در جای خالی کلمه یا عدد مناسب قرار دهید.

«حجم مکعبی به ضلع یک سانتی‌متر برابر است.»

۲۸. یک ظرف استوانه‌ای داریم که شعاع قاعده‌ی آن ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۶۰ سانتی‌متر است. چند پاکت شیر به ابعاد

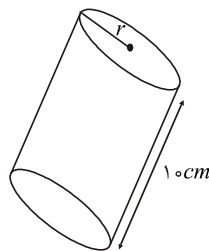
۶/۲۸ و ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر در ظرف بریزیم تا ظرف پر شود؟

۲۹. استخری است به شکل مکعب مستطیل به طول ۲۰، عرض ۱۰ و عمق ۴۰ متر:

الف) حجم این استخر چند لیتر است؟

ب) سعید می‌خواهد بدنه و کف این استخر را رنگ کند. او چند مترمربع باید رنگ بزند؟

۳۰. الف) حجم شکل مقابل را محاسبه نمایید. (با ذکر فرمول حجم)



ب) ستونی است به شکل منشور ۵ پهلو که اندازه‌ی هر ضلع قاعده‌ی آن ۳/۰ متر و ارتفاع آن ۴ متر می‌باشد. می‌خواهند

بدنه‌ی این ستون را کاشی بچسبانند، چند مترمربع کاشی لازم است؟

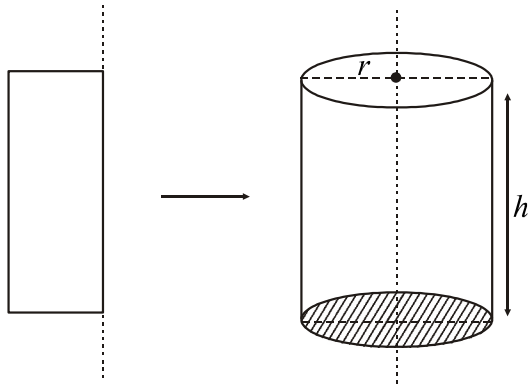
۳۱. حوضی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۴، ۳ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی است و می‌خواهند آن را توسط شیر آبی

که در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب از آن وارد حوض می‌شود پر کنند. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

۳۲. ستونی به شکل استوانه است که شعاع قاعده‌اش ۳/۰ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهیم بدنه‌ی خارجی آن را رنگ بزنیم.

اگر برای رنگ کردن هر مترمربع ۳۰۰۰۰ تومان لازم باشد چند تومان بابت رنگ کردن آن ستون باید پرداخت شود؟

۳۳. با مقوا منشوری سه پهلو ساخته‌ایم که قاعده‌ی آن مثلث قائم‌الزاویه است و اضلاع زاویه‌ی قائمه آن ۳ و ۴ و وتر آن ۵ سانتی‌متر می‌باشد. اگر ارتفاع منشور ۱۰ سانتی‌متر باشد، برای ساختن این منشور چند سانتی‌متر مربع مقوا مصرف کرده‌ایم؟



۳۴. حاصل $(5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7)(4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7)$ را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۳۵. چند عدد زوج بین اعداد 3^2 و 3^3 قرار دارد؟

۳۶. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $5^2 - 2^5 =$

ب) $(-5)^2 + (-2)^5 =$

ج) $5^1 - 1^5 =$

د) $1388^1 - 1388^0 =$

۳۷. حاصل عبارت‌های $(10^2)^3$ و 10^{2^3} را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳۸. اگر $A = 3^{2^5}$ باشد، حاصل A^2 را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳۹. اگر داشته باشیم $10^x - 10 = 9990$ ، آن گاه مقدار x را بیابید.

۴۰. اگر اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ را در هم ضرب کنیم و سپس عدد حاصل را به عوامل اول تجزیه کنیم، توان عدد ۲ در

حاصل ضرب چقدر است؟

۴۱. اعداد 25^6 و 27^4 و 64^2 را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۴۲. حاصل عبارت $(8 \div 2) - 3 \times 4^2$ چند است؟

۴۳. اگر عدد $N = 3^5 \times 3^2 \times 7 \times \square$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، \square حداقل چه عددی می‌تواند باشد؟



۱.

کل حالت‌های ممکن برابر است با:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

این مسئله از طریق راهبرد الگوسازی با رسم جدول نیز قابل حل است.

۲.

با راهبرد نمادین داریم:

$$5 \times \square + 15 = 170$$

$$5 \times \square = 155$$

$$\square = 31$$

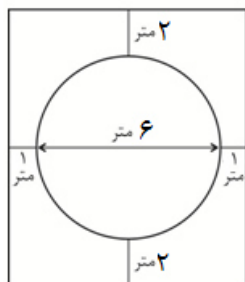
۳.

با راهبرد رسم شکل داریم:

مساحت دایره (قسمت فرش شده) برابر است با: $3/14 \times 3 \times 3 = 28/26$

مساحت سالن برابر است با: $10 \times 8 = 80$

مساحت قسمت خالی برابر است با: $80 - 28/26 = 51/74$



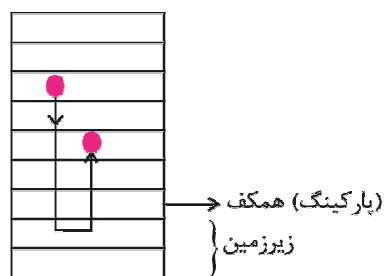
۴.

با راهبرد حدس و آزمایش داریم:

تعداد چهارپا	تعداد پرنده	نتیجه
۲۵	۲۵	$(25 \times 4) + (25 \times 2) = 100 + 50 = 150$
۲۰	۳۰	$(20 \times 4) + (30 \times 2) = 80 + 60 = 140$
۱۵	۳۵	$(15 \times 4) + (35 \times 2) = 60 + 70 = 130$
۱۰	۴۰	$(10 \times 4) + (40 \times 2) = 40 + 80 = 120 \checkmark$

۵.

با توجه به شکل مقابل، آسانسور در طبقه دوم قرار خواهد گرفت.



$$4 - 5 + 3 = 2$$

$$\begin{array}{cccc} \xrightarrow{\text{شروع}} & -۸ & + & (-۲) & + \\ & & & & ۵ \\ & & & & - & (+۳) & = & \triangle & -۸ \end{array}$$

$$-۸ + (-۲) + ۵ - (+۳) = \underbrace{-۸ - ۲}_{-۱۰} + ۵ - ۳ = \underbrace{-۱۰ + ۵}_{-۵} - ۳ = -۵ - ۳ = -۸$$

دمای شهر یزد $+۴$ درجه است، زیرا ۴ درجه بالای صفر است. میباید ۶ درجه گرم تر است، بنابراین داریم:

$$+۴ + (+۶) = ۴ + ۶ = ۱۰ \quad \text{دمای هوای میباید}$$

$$\text{میانگین دمای دو شهر} = \frac{۴ + ۱۰}{۲} = \frac{۱۴}{۲} = ۷$$

$$\text{الف)} -۳ - ۲ \times \left[۴ - \left(\begin{array}{c} ۵ \\ ۱۲ - ۷ \end{array} \right) \right] = -۳ - ۲ \times (-۱) = -۳ + ۲ = -۱$$

$$\text{ب)} ۲ \times \left[\left(\begin{array}{c} -۹ \\ ۷ - ۱۶ \end{array} \right) + ۳ \right] - \left(\begin{array}{c} -۵ \\ ۴ - ۹ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} -۱ \\ ۹ - ۱۰ \end{array} \right) = ۲ \times (-۶) + ۵ + ۱ = -۱۲ + ۶ = -۶$$

$$\text{پ)} - \left(- \left(\begin{array}{c} -۱۷ \\ -۵ - ۱۲ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} +۷ \\ -۷ + ۱۴ \end{array} \right) \right) - \left(\begin{array}{c} -۸ \\ ۲۷ - ۳۵ \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} +۱۷ \\ +۱۷ - ۷ \end{array} \right) + ۸ = -۱۰ + ۸ = -۲$$

$$\text{ت)} [(-۱۲) \times (+۲)] \div (-۴۸) = (-۲۴) \div (-۴۸) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث)} [-۶ - (+۲۲)] \times [(-۳۶) \div (-۹)] = (-۲۸) \times (۴) = -۱۱۲$$

$$\text{ج)} \frac{\begin{array}{c} ۷ \\ (-۴۹) \times (-۶۵) \\ (+۱۳) \times (-۳۵) \end{array}}{۱} = -۷$$

$$\text{ح)} \frac{\begin{array}{c} -۱ \\ (-۵) \times ۹ \times (-۵۱) \\ ۳۹ \times (-۸۵) \end{array}}{۱} = -۷$$

۹.

ابتدا عبارت جبری را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}(4x - 2y + 6) - (3x - 2y + 4) = 2x - \frac{y}{x} + 3 - 3x + 2y - 4 = -x + y - 1$$

به دست می‌آوریم: $x = 3$ و $y = -2$ حال مقدار عددی عبارت ساده شده را به ازای

$$-x + y - 1 \xrightarrow{x=3, y=-2} -3 - 2 - 1 = -6$$

۱۰.

داریم:

الف) $4, 16, 64, 256, \dots, 4^n$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $4^1 \quad 4^2 \quad 4^3 \quad 4^4$

ب) $1^0, 2^1, 3^2, 4^3, \dots, 11^n - 1$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \times 1 - 1 \quad 1 \times 2 - 1 \quad 1 \times 3 - 1 \quad 1 \times 4 - 1$

ج) $7, 12, 17, 22, \dots, 5n + 2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $5 \times 1 + 2 \quad 5 \times 2 + 2 \quad 5 \times 3 + 2 \quad 5 \times 4 + 2$

۱۱.

داریم:

$$6\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} = 1\right) \Rightarrow 3x - 3 - 2x + 6 = 6$$

$$\Rightarrow x + 3 = 6 \Rightarrow x = 3$$

۱۲.

مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی برابر است با:

$$(n-2) \times 180^\circ$$

مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر است با:

$$(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$$

$$4x + 3x + 2x + x = 360 \Rightarrow 10x = 360 \Rightarrow x = 36$$

$$4 \times 36^\circ = 144^\circ$$

۱۳.

$$(n-2) \times 180^\circ = 144^\circ$$

$$(n-2) \times 180 = 144 \Rightarrow (n-2) = 144 \div 180 = 8$$

$$\Rightarrow n - 2 = 8 \Rightarrow n = 10$$

۱۴.

اگر $NP = ۱$ آن گاه $PB = ۲$ ، $MN = ۳$ ، $AM = ۶$ و $AB = ۱۲$ داریم:

الف) $\frac{AM}{۲} - PB = \frac{۱}{۴}MP$



ب) $\frac{۳}{۲}PB + MN = AM$

ج) $PB = \frac{۱}{۶}AB$

۱۵.

$$\hat{FCD} = ۱۸۰^\circ - (۹^\circ + ۷^\circ) = ۷۰^\circ$$

چون $\triangle ACD$ متساوی الساقین است، پس $\hat{C} = ۷۰^\circ$. بنابراین داریم:

$$\hat{BCF} + \hat{FCD} = ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{BCF} = ۵^\circ$$

چون $\triangle ABG$ متساوی الاضلاع است، پس $\hat{GBA} = ۶۰^\circ$ و $\hat{FBC} = ۱۲۰^\circ$. حال داریم:

$$\hat{FBC} + \hat{BCF} + \hat{F} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{F} = ۱۰^\circ$$

۱۶.

چون AM و BM نیم‌سازهای زاویه‌های A و B هستند، پس:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}_1 + ۲\hat{B}_1 = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = ۷۰^\circ$$

پس:

$$\Rightarrow \hat{BMA} = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

۱۷.

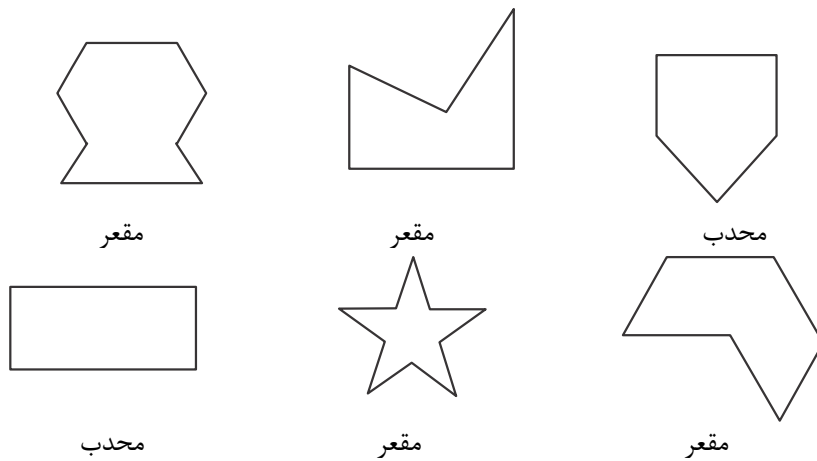
$$\frac{\hat{O}_1}{\hat{O}_2} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{۲}{۳}\hat{O}_2$$

$$\hat{BOA} = ۱۸۰^\circ - (۹^\circ + ۳^\circ) = ۶۰^\circ$$

$$\hat{BOx} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

$$\hat{BOx} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \frac{۲}{۳}\hat{O}_2 + \hat{O}_2 = \frac{۵}{۳}\hat{O}_2 \Rightarrow \frac{۵}{۳}\hat{O}_2 = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = ۱۲۰^\circ \times \frac{۳}{۵} = ۷۲^\circ$$

۱۸.

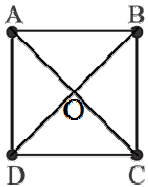


۱۹.

- الف) در انتقال، اندازه‌ی اضلاع تغییر می‌کند. \times
 ب) دوران 90° درجه نسبت به یک نقطه، همان قرینه نسبت به نقطه است. \times
 ج) انتقال مساحت را ثابت نگه می‌دارد. \checkmark
 د) تقارن نسبت به یک خط، مساحت را تغییر نمی‌دهد. \checkmark
 ه) تقارن نسبت به یک نقطه، جهت شکل را تغییر می‌دهد. \checkmark

۲۰.

با دوران 90° ساعتگرد، نقطه D به نقطه A و با دوران 180° درجه به نقطه C می‌رسیم.



۲۱.

الف:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \times 4^2 \times 10 = 160\pi$$

سانتی‌متر مکعب

ب: باید مساحت جانبی این ستون را به دست آوریم. داریم:

$$\text{محیط قاعده} = 6 \times 0.2 = 1.2$$

$$S_{\text{جانبی}} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = 1.2 \times 5 = 6$$

متر مربع

۲۲.

الف: دو- متوازی الاضلاع

ب:

$$V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعدہ}} \times \text{ارتفاع}$$

$$S_{\text{قاعدہ}} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

$$V = 10 \times 8 = 80 \text{ سانتی متر مکعب}$$

۲۳.

$$S_{\text{قاعدہ}} = \frac{1}{4} \times \pi \times 3^2 = \frac{9}{4} \pi$$

$$V = \frac{9}{4} \pi \times 5 = \frac{45}{4} \pi$$

۲۴.

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$$

$$r = 10 \div 2 = 5$$

$$V = \pi \times 5^2 \times 6 = 150\pi \text{ متر مکعب}$$

۲۵.

$$V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعدہ}} \times \text{ارتفاع}$$

$$S_{\text{قاعدہ}} = \frac{(8+10) \times 6}{2} = 54$$

$$V = 54 \times 12 = 648$$

۲۶.

$$S_{\text{کف استخر}} = 9 \times 3 = 27$$

$$\text{محیط استخر} = (9+3) \times 2 = 24$$

$$S_{\text{جانبی}} = 24 \times 2 = 48$$

$$\text{مترمربع} = 48 + 27 = 75 = \text{مساحت سطحی که باید رنگ شود}$$

$$\text{کیلوگرم} = 75 \times 0.4 = 30 = \text{مقدار رنگ مورد نیاز}$$

۲۷.

۱ سانتی متر مکعب

۲۸.

$$\frac{V_{\text{ظرف}}}{V_{\text{پاکت شیر}}} = \frac{\frac{3}{14} \times 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{1} \times \frac{6}{2}} = 80$$

۲۹.

الف:

$$V = 20 \times 10 \times 40 = 8000 \text{ متر مکعب} \Rightarrow V = 8000 \times 1000 = 8000000 \text{ لیتر}$$

۱۰۰۰ لیتر = ۱ متر مکعب

ب:

$$S_{\text{قاعده}} = 20 \times 10 = 200$$

$$\text{محیط قاعده} = (20 + 10) \times 2 = 60$$

$$S_{\text{جانبی}} = 60 \times 40 = 2400$$

$$S_{\text{قاعده}} + S_{\text{جانبی}} = 2400 + 200 = 2600 \text{ مترمربع}$$

۳۰.

الف:

$$S_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = 3/14 \times r^2 \times 10 = 31/4 r^2$$

ب: باید مساحت جانبی منشور را به دست آوریم:

$$S_{\text{جانبی}} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده}$$

$$= 5/3 \times 5 \times 4 = 6 \text{ متر مربع}$$

۳۱.

$$V_{\text{مکعب مستطیل}} = 4 \times 3 \times 1/5 = 18 \text{ متر مکعب}$$

$$V = 18 \times 1000 = 18000 \text{ لیتر}$$

$$\frac{18000}{60} = 300 \text{ دقیقه}$$

$$300 \div 60 = 5 \text{ ساعت}$$

۳۲.

$$S_{\text{جانبی}} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده}$$

$$= 2 \times 0/3 \times 3/14 \times 5 = 9/42 \text{ متر مربع}$$

$$9/42 \times 300000 = 282600 \text{ تومان}$$

۳۳.

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2 \times S_{\text{قاعده}}$$

$$= 10 \times (3 + 4 + 5) + \frac{1}{\cancel{x}} \times \left(\frac{3 \times 4}{\cancel{x}} \right) = 10 \times 12 + 12 = 132 \text{ سانتی متر مربع}$$

۳۴

$$(4^Y + 4^Y + 4^Y + 4^Y)(5^Y + 5^Y + 5^Y + 5^Y + 5^Y) = 4 \times 4^Y \times 5 \times 5^Y = 4^{\text{A}} \times 5^{\text{A}} = 20^{\text{A}}$$

۳۵

می‌دانیم: $3^2 = 9$ و $3^3 = 27$ پس اعداد زوج بین این دو عدد، عبارتند از:

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۶

بنابراین ۹ عدد زوج بین این دو عدد وجود دارد.

۳۶

الف) $25 - 32 = -7$

ب) $25 - 32 = -7$

ج) $5 - 1 = 4$

د) $1388 - 1 = 1387$

۳۷

$$(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6 \qquad 10^{2^3} = 10^8$$

۳۸

$$81A^2 = 81 \times (3^{3^5})^2 = 81 \times (3^{3^2})^2 = 81 \times 3^{6^4} = 3^4 \times 3^{6^4} = 3^{6^8}$$

۳۹

$$10^X - 10 = 9990 \Rightarrow 10^X = 10000 \Rightarrow 10^X = 10^4 \Rightarrow X = 4$$

۴۰

از عدد حاصل توان‌های ۲ را به صورت زیر جدا می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \\ &= 2 \times 2^2 \times 2 \times 3 \times 2^3 \times 2 \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 2^4 \times 3^2 \times 2 \times 2^2 \times 5 \\ &= 2 \times 2^2 \times 2 \times 2^3 \times 2 \times 2^2 \times 2 \times 2^4 \times 2 \times 2^2 = 2^{18} \end{aligned}$$

۴۱

هر سه عدد را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$25^6 = (5^2)^6 = 5^{12}$$

$$27^4 = (3^3)^4 = 3^{12}$$

$$64^2 = (2^6)^2 = 2^{12}$$

واضح است که $2^{12} < 3^{12} < 5^{12}$.

.۴۲

$$3 \times 4^2 - (8 \div 2) = 3 \times 16 - 4 = 48 - 4 = 44$$

.۴۳

از آنجا که $2^2 \times 5^2 = 100$ ، برای اینکه N بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد، باید حداقل دو عامل ۲ و حداقل دو عامل ۵ داشته باشد.

حال با توجه به مقدار N ، باید حداقل دو عامل ۵ داشته باشد و چون حداقل مقدار را برای خواسته است، بنابراین مقدار ، ۲۵ است.