



## سوالات مرحله نهایی لیگ علوم ریاضی

آبان ماه ۱۳۹۹

پایه دهم ریاضی

### دستور العمل پاسخگویی و داورک سوالات

- مرحله یک- پاسخ گویی به سوالات: سوالات مسابقه یک هفته قبل از آزمون از طریق سامانه آموزش مجازی، کانال تلگرام و سایت اطلاع رسانی لیگ علمی پایا در اختیار گروه های منتخب قرار خواهد گرفت که گروه ها بایستی ظرف مدت یک هفته به این سوالات پاسخ دهند و سپس پاسخ سوالات را در قالب پاورپوینت و PDF در سامانه آموزش مجازی بارگذاری نمایند.
- \* این سوالات باز هستند و جواب معینی ندارند.
- \* در پاسخ دهی به سوالات می توانید از اساتید، مقالات و منابع معتبر آموزشی و کتابخانه ای استفاده نمایید.
- \* سوالات بایستی در تاریخ مقرر تحویل داده شوند و در صورت تاخیر در تحویل، امتیاز منفی به تیم ارایه دهنده تعلق خواهد گرفت.
- \* پاسخ هر سوال حداکثر بایستی ۱۰ صفحه داشته باشد و در قالب یک پاورپوینت ارائه شود.
- \* بعد از ارسال پاسخها، دانش آموزان حق تغییر و یا کامل کردن پاسخها را ندارند و ملاک ارزیابی پاسخ هایی است که برای دبیرخانه ارسال کرده‌اید و مورد داور اولیه قرار گرفته است.

## International Scientific League of PAYA2020

بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور و هشتمین دوره مسابقات دانش آموزان جهان اسلام در ایران

از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته های علوم پایه، علوم تجربی، علوم انسانی، پژوهشی، کارآفرینی، علوم کامپیوتر و برنامه نویسی





**مرحله دو-ارزیابی اولیه سوالات:** کمیته‌ی مسابقات بعد از ارسال سوالات توسط گروه‌های منتخب سوالات را ارزیابی نموده و داروی اولیه انجام می‌گیرد. گروه‌هایی که به سوالات پاسخ نداده و طبق زمان‌بندی مسابقه برای دبیرخانه ارسال نکرده باشند؛ از حضور در رقابت پایانی حذف خواهند شد.

**مرحله سه- ارزیابی نهایی:** گروه‌های راه یافته به مرحله نهایی طبق جدول زمان‌بندی که قبل از مسابقه ارائه می‌گردد، جهت ارزیابی و مسابقه پایانی به صورت آنلاین به رقابت خواهند پرداخت.

در این مرحله هر گروه شرکت‌کننده در هر مرحله در یکی از دسته‌های زیر به قید قرعه در نقش‌های متفاوتی به رقابت می‌پردازند.

- **نقش گزارش‌گر:** گروه‌ها در نقش گزارش‌گر بایستی پاسخ سوالاتی که هیات داوران و گروه چالش‌گر مشخص می‌کنند را با استفاده از پاورپوینت ارائه دهند. (گروه‌ها حق تغییر پاسخ‌های خود را نسبت به آنچه که قبل از مسابقه ارائه داده‌اند را ندارند)

- **نقش چالش‌گر:** مساله‌هایی که تیم ارائه دهنده باید به آن‌ها پاسخ دهد را انتخاب می‌کند؛ نقاط ضعف و قوت تیم ارائه دهنده را بیان می‌کند و می‌بایست به سوالات هیات داوران جواب دهد. برای بررسی بهتر، پاسخ‌های گروه گزارش‌گر قبل از شروع هر راند در اختیار گروه چالش‌گر قرار می‌گیرد.

- **نقش داور:** یکی از اعضای این تیم پس از مشورت با سایر اعضا، با بیان مختصری عملکرد تیم گزارش‌گر و چالش‌گر را ارزشیابی و نتیجه‌گیری می‌کند.

- **نقش ناظر:** گروه‌ها در این نقش گروه می‌توانند از هر گروه دیگری سوال بپرسند.

در نهایت هیات داوران به نحوه ایفای نقش توسط گروه‌ها امتیاز خواهند داد و تیم‌های برتر را معرفی و ارزیابی خواهند نمود.

\*مشخص کردن نقش‌ها طی قرعه‌کشی توسط کمیته‌ی مسابقات صورت می‌گیرد.

\*لازم به ذکر است که پاسخ دادن به سوالات اختیاری **نبوده** و دانش‌آموزان موظف هستند که به همه سوالات پاسخ دهند. در صورت عدم پاسخ‌دهی به هر سوال امتیاز آن سوال محسوب نمی‌شود.





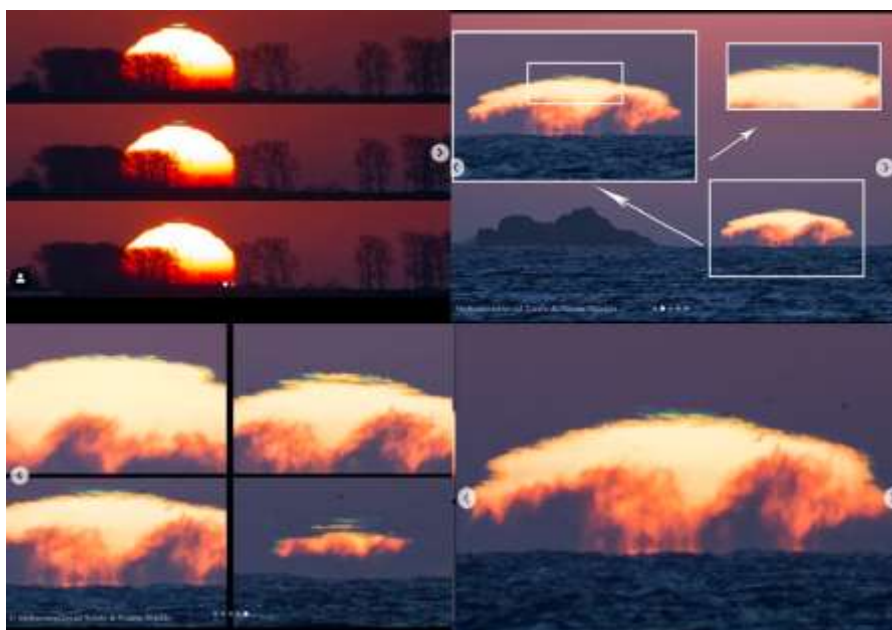
توجه: در تمامی سوالات فیزیک علاوه بر ذکر علت پدیده باید به مسائل محاسباتی آن نیز اشاره شود.

۱. هنگام طلوع و یا غروب خورشید یا ماه ، این دو به صورت دایره‌ای دیده نمی‌شوند و کمی به صورت بیضی دیده می‌شوند. همچنین در برخی اوقات مطابق شکل‌های زیر دیده می‌شوند. علت این پدیده‌ها را همراه با محاسبات توضیح دهید .



عکس‌ها از آقای بابک امین تفرشی

۲. برخی اوقات در هنگام غروب خورشید رنگ سبز رنگی در بالای قرص خورشید شکل می‌گیرد. علت این پدیده چیست؟



عکس‌ها از آقای مجتبی ترابی و پیج twanight





۳. هنگامی که از ایستگاه فضایی به زمین نگاه کنیم تصاویر عجیب و جالبی می‌بینیم. یکی از این تصاویر مانند زیر، تصویر هاله‌ای از نور (قرمز یا بنفش) در اطراف زمین است که با فاصله‌ای از زمین قرار گرفته است. علت این پدیده چیست و در چه ارتفاعی رخ می‌دهد؟



۴. در یک عکس که از یک دوربین نسبتاً پیشرفته از درون هواپیما از شهر تهران گرفته شده دیده شده است که بخشی از پره ملخی هواپیما به طرز عجیبی درون تصویر افتاده است. علت این اتفاق چیست؟



منبع سایت شرکت کنترل کیفیت هوا

۵. هنگامی که آب در حال جوشیدن است و شعله زیر آن را خاموش کنیم پس از مدت کوتاهی دمای آب کمتر شده و آب از جوشش می‌افتد. اگر بلافاصله در این هنگام به آب مقداری نمک اضافه کنیم دیده می‌شود که آب مجدداً شروع به جوشش می‌کند. در حالی که بنا به ۳ دلیل انتظار همچنین چیزی را نداریم.

۱. ترکیب شیمیایی آب و نمک یک ترکیب گرماگیر است.

۲. مخلوط آب (جوش) و نمک (با دمای اتاق) با محاسبات گرمایی ویژه باعث کاهش دمای آب می‌شود.

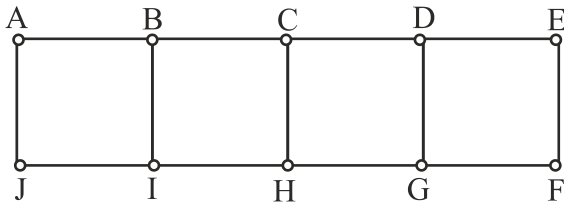
۳. ترکیب نمک در آب باعث افزایش نقطه دمای جوش می‌شود. با این حساب پس چرا این اتفاق می‌افتد؟





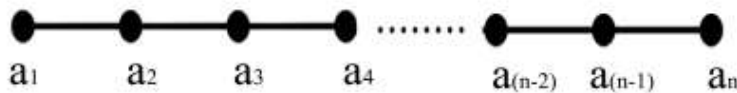
۶. یک قطعه آهنی در یک تکه یخ قرار دهید و آن را داخل آب قرار دهید به گونه‌ای که روی آب شناور باشد. بعد از مدتی دیده می‌شود که قطعه یخ به آهستگی پایین می‌آید و سپس مجدداً به سطح آب نزدیک شده و ناگهان به کف ظرف می‌رود. این پدیده را توضیح دهید و بگویید برای اینکه این اتفاق رخ بدهد چه شرطی باید بین پارامترهای مساله باشد؟

۷. دو دزد شب‌ها در سزمین شکرستان پرسه می‌زنند. نقشه ارتباطی شهر به صورت زیر است:

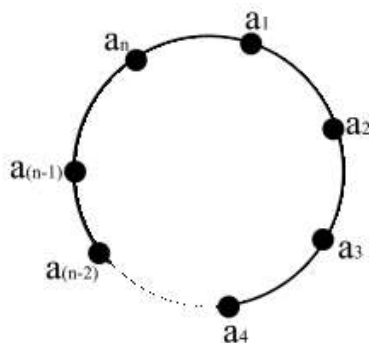


می‌دانیم اگر بین دو نقطه خط واصل باشد یعنی می‌توان مستقیم از یکی به دیگری رفت. برای دستگیری دزدها می‌توان در بعضی نقاط دو پلیس و در سایر نقاط یک پلیس و در بعضی هیچ پلیسی قرار نداد تا اگر دزدها در نقاط دیگر مشاهده شدند دستگیر شوند. (هر دزد توسط یک پلیس می‌تواند دستگیر شود) مثلاً اگر در نقاط G و B دو پلیس و در نقاط J و E یک پلیس قرار داده شود در این صورت دو دزد هر طور در سیستم قرار گیرند دستگیر خواهند شد (دو دزد نمی‌توانند همزمان در یک نقطه باشند). ساختار مطلوب ساختاری است که اگر در یک نقطه پلیسی نبود در یکی از نقاط مجاور آن ۲ پلیس حضور داشته باشند. می‌خواهیم با کمترین نیروی پلیس امنیت را در ساختارهای زیر فراهم کنیم:

(۱) مسیر دارای n راس  $(P_n)$  :



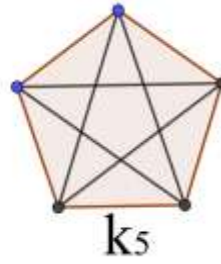
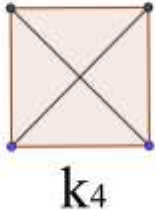
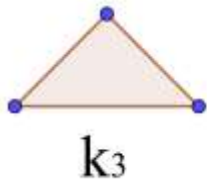
(۲) دور n راسی  $(C_n)$  :



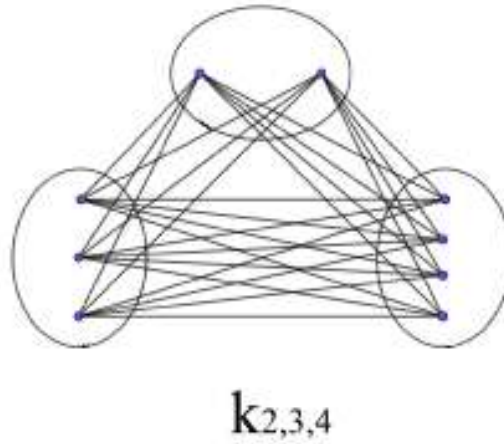
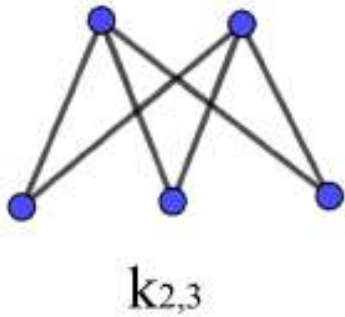
(۳) کامل n راسی  $(K_n)$  : در این گراف بین همه‌ی رئوس یال وجود دارد. به عنوان مثال:



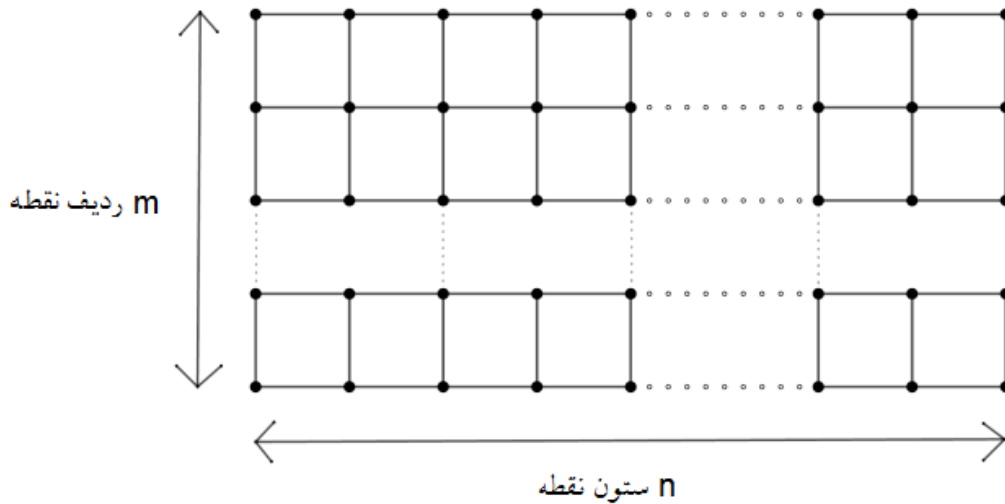




۴) کامل چندبخشی  $(K_{m_1, m_2, \dots, m_n})$ : هر رأس در هر بخش به تمام رؤوس در بخش‌های دیگر متصل است.



۵) شبکه  $m \times n$   $(G_{m,n})$



۶) گراف پترسن تعمیم یافته  $GP(n, k)$ ،  $(n, k) = 1$ : این گراف دارای یک دور بیرونی  $n$  تایی و یک  $n$  تایی در

داخل است

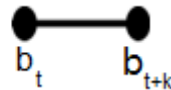
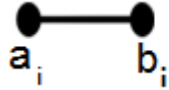




دور بیرونی  $\rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$

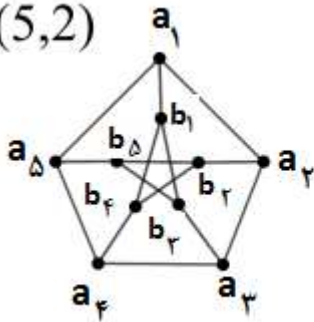
درونی  $\rightarrow b_1, b_2, \dots, b_n$

در درون قاعده اتصال به صورت زیر است:

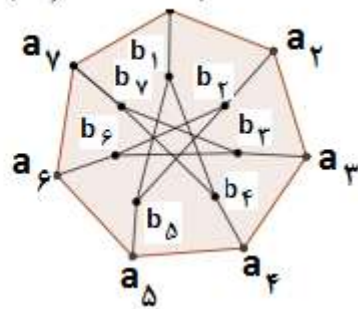


اگر  $n < t+k$  آنگاه باقیمانده  $t+k$  به  $n$  را در نظر می‌گیریم.

GP(5,2)



GP(7,3)



اگر ۳ دزد در شهر پرسه بزنند و بخواهیم در هر نقطه ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ پلیس قرار دهیم به طوری که هر نقطه بدون پلیس، یا مجاور با دو نقطه با ۲ پلیس یا مجاور با یک نقطه با ۳ پلیس باشد، در ساختارهای زیر کمترین تعداد پلیس را مشخص کنید.

$K_n$  (۳)

$C_n$  (۲)

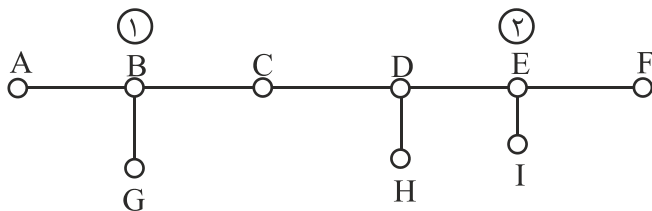
$P_n$  (۱)

$G_{m,n}$  (۶)

GP(n, ۳) (۵)

$K_{m_1, m_2, \dots, m_n}$  (۴)

۸. نقشه ارتباطی شهری به صورت زیر است:



می‌خواهیم تعدادی فرستنده روی نقاط مختلف قرار دهیم به طوری که پیام ارسالی توسط تمام نقاط شهر دریافت شود. این

فرستنده‌ها دارای قدرت ارسال ۱ و ۲ هستند. (نوع ۱ یعنی تا یک نقطه آن طرف تر پوشش سیگنال دارد و نوع ۲ تا دو نقطه

آن طرف تر) به عنوان مثال اگر در شکل بالا در نقطه B فرستنده نوع ۱ و در نقطه E فرستنده نوع ۲ قرار داده شود، تمام



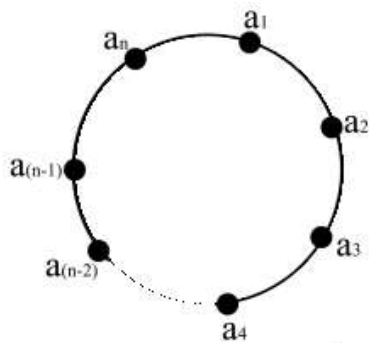


نقاط پیام را دریافت خواهند کرد. هزینه ارسال در یک شبکه را مجموع قدرت فرستنده‌های استفاده شده تعریف می‌کنیم. به

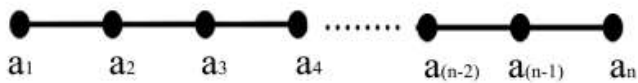
سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) هزینه ارسال را در شبکه‌های زیر بیابید. (توجه کنید موارد ۱ تا ۶ در سوال قبل تعریف شده‌اند).

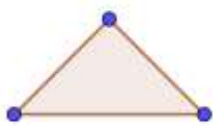
$C_n$  (۱)



$P_n$  (۲)



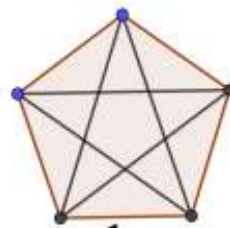
$K_n$  (۳)



$k_3$



$k_4$

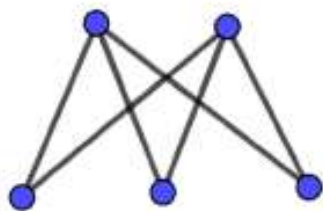


$k_5$

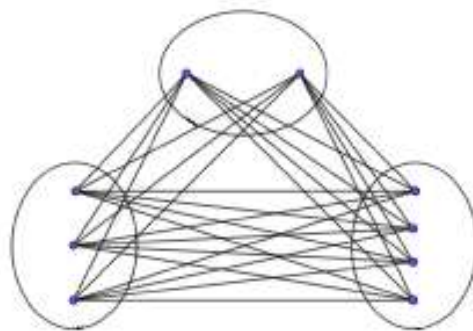
$K_{m_1, m_2, \dots, m_n}$  (۴)





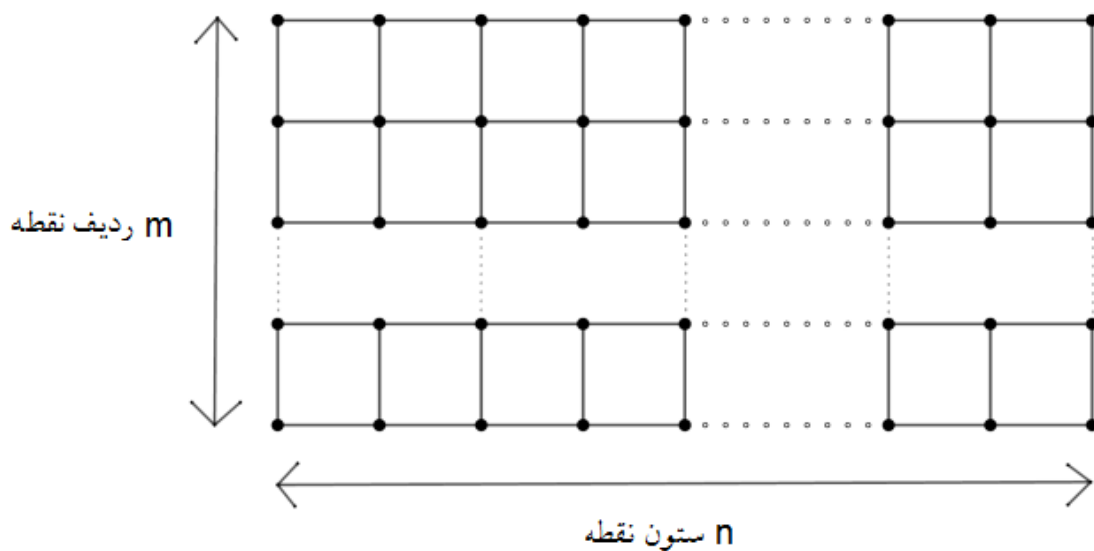


$K_{2,3}$



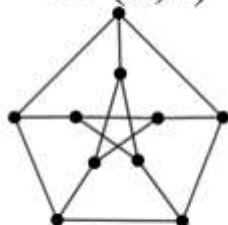
$K_{2,3,4}$

$G_{m,n}$  (۵)



$GP(n, r)$  (۶)

$GP(5,2)$



$GP(7,3)$



ب) آیا وجود فرستنده‌های با قدرت ۲ در یافتن جواب مساله تاثیر دارد؟ در چه حالت‌هایی؟



همان طور که می‌دانید به عددی گنگ گفته می‌شود که نتوان آن را به صورت کسری نوشت یا به عبارت ساده‌تر؛ وقتی به صورت اعشاری نوشته شود، دارای الگوی مشخصی نباشد. اثبات گنگ بودن عددی مانند رادیکال ۲ راحت است. اما در حالت کلی اثبات گنگ بودن یک عدد، مساله‌ی سختی به شمار می‌رود؛ به‌عنوان مثال اثبات گنگ بودن عدد پی در قرن ۱۸ توسط لمبرت و بعد از اثبات گنگ بودن عدد نپر اتفاق افتاد. اما تاکنون اثبات نشده است که  $\pi + e$  و  $\pi e$  گنگ هستند یا خیر. نکته‌ی جالب در مورد این موضوع آن است که ما می‌دانیم حداقل یکی از دو عبارت فوق گنگ است اما کدام‌یک؟ نظر خود را با ذکر دلیل بیان کنید.

۱۰. حدس اردیش - استراوس

در سال ۱۹۴۸ توسط دو ریاضیدان به همین نام ارائه شد؛ این حدس بیان می‌کند «هر عدد گویا به صورت ۴ بر روی  $n$  را می‌توان به صورت جمع سه کسر به شکل زیر نوشت»

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

به عنوان مثال:

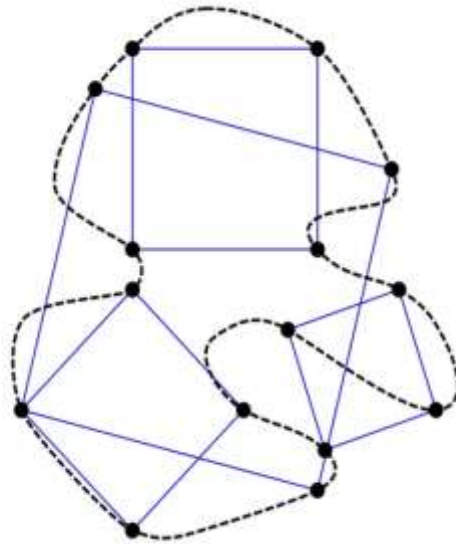
$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{1801} = \frac{1}{451} + \frac{1}{295364} + \frac{1}{3249004}$$

درستی این حدس توسط کامپیوتر تا عدد ۱۰۱۷ تأیید شده است؛ اما کماکان اثباتی برای آن وجود ندارد. نظر خود را در مورد درستی یا نادرستی این حدس با ذکر دلیل بیان کنید.

مساله مربع‌های ترسیم شده

۱۱. مساله‌ی مربع‌های ترسیم شده برای حل این مسئله باید مداد به دست بگیرید و شکلی را ترسیم کنید. روی یک برگ کاغذ، یک حلقه ترسیم کنید - لزومی ندارد که این حلقه شکل خاصی داشته باشد، و هر حلقه‌ی بسته‌ای که از خود عبور نکند قابل قبول است.



بر اساس فرضیه‌ی مربع‌های ترسیمی، شما باید بتوانید درون این حلقه مربعی رسم کنید که هر چهار گوشه‌ی آن مانند شکل بالا با حلقه تماس داشته باشند.

شاید ابتدا ترسیم این مربع ساده به نظر برسد اما اگر بخواهیم از دیدگاه علم ریاضی بحث کنیم، این حلقه می‌تواند شکل‌های بسیار متنوعی داشته باشد و تاکنون کسی نتوانسته است با قطعیت اثبات کند که آیا برای هر کدام از آن‌ها، مربعی وجود دارد که گوشه‌هایش با حلقه‌ها در تماس باشد؟

تامپسون در این باره می‌نویسد: "این مسئله برای چندین شکل دیگر، نظیر مثلث و مستطیل حل شده است. اما مسئله‌ی مربوط به مربع‌ها تا حدی دشوار به نظر می‌رسد و تاکنون هیچ ریاضیدانی نتوانسته است آن را اثبات کند." به نظر شما آیا ممکن است این مسئله به روش ریاضی اثبات شود؟ در مورد پنج ضلعی‌ها چه فکر می‌کنید؟

