دهمین دوره لیگ علمی بین المللی پایا

فصل اول: عددهای صحیح و گویا

عددهای طبیعی

عددهای ۱,۲,۳,۴,... را عددهای طبیعی گویند. کوچک‌ترین عدد طبیعی ۱ و بزرگ‌ترین عدد طبیعی مشخص نیست.

عددهای حسابی

عددهای ۰,۱,۲,۳,۴,... را عددهای حسابی گویند. کوچک‌ترین عدد حسابی، صفر و بزرگ‌ترین عدد حسابی مشخص نیست.

از آن‌جا که اعداد حسابی شامل تمام اعداد طبیعی هستند، می‌توان گفت هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است اما هر عدد حسابی یک عدد طبیعی نیست، زیرا صفر یک عدد حسابی است ولی طبیعی نیست.

عددهای صحیح

عددهای ...,−۳,−۲,−۱,۰,۱,۲,۳,... را عددهای صحیح گویند. همان طور که ملاحظه می‌کنید کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهای صحیح مشخص نیست. اما بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی (۱-) است و کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت ۱ است.

از آن‌جا که اعداد صحیح، شامل اعداد حسابی و طبیعی است، بنابراین هر عدد حسابی یا هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است.

قرینه یك عدد

دو عدد که فاصله آن‌ها از صفر به یک اندازه است را قرینه گویند. نماد قرینه در ریاضی (-) است.

قرینه $a = -a$

مثال

$-(-۸) = +۸$

$-(-(-(-(+۲۱)))) = ۲۱$

نکته

اگر تعداد قرینه کردن عددی زوج باشد، حاصل همان عدد اولیه است ولی اگر تعداد قرینه کردن عددی فرد باشد، عدد حاصل قرینه عدد اولیه می‌باشد.

تمرین

عدد ۷- را ۵۴ بار قرینه می‌کنیم، فاصله عدد حاصل از ۸ چقدر است؟

پاسخ

اگر عدد ۷- را ۵۴ بار قرینه کنیم، حاصل ۷- خواهد بود که فاصله آن تا ۸، ۱۵ است.

جمع اعداد صحیح

برای جمع دو عدد صحیح دو حالت داریم:

الف) اگر دو عدد هم‌علامت باشند، دو عدد را با هم جمع کرده، علامت حاصل، همان علامت دو عدد است.

ب) اگر دو عدد هم‌علامت نباشند، بدون در نظر گرفتن علامت، دو عدد را از هم کم کرده، علامت عدد حاصل، علامت عدد بزرگ‌تر است.

نکته

در تفریق دو عدد، ابتدا عمل تفریق را به جمع تبدیل کرده و عدد بعد از علامت تفریق را قرینه می‌کنیم و سپس طبق آنچه در بالاگفته شد، حاصل را حساب می‌کنیم.

تمرین

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $-[-(-۵) + (-۱۰)] =$

۲) $۱ - ۲ - (۳ - ۴ - (۵ - ۶ - (۷ - ۸ - (۹ - ۱۰)))) =$

پاسخ

$$1)\ -[-(-5)+(-10)]=-[5+\cancel{(-10)}^{-5}]=+5$$

$$2)\ 1-2-(3-4-(\underbrace{5-6}_{-1}-\underbrace{(7-8-\underbrace{(9-10)}_{-1})}_{\underbrace{-7}_{0}})))=1-2-(\underbrace{3-4+1}_{0})=-1$$

ضرب و تقسیم دو عدد صحیح

در ضرب و تقسیم دو عدد صحیح مانند ضرب و تقسیم دو عدد طبیعی عمل می‌کنیم. برای تعیین علامت حاصل به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر دو عدد مثبت یا دو عدد منفی باشند، علامت حاصل مثبت است و اگر یکی از دو عدد مثبت و دیگری منفی باشد، علامت حاصل منفی است.

$$\oplus \ \substack{\times \\ \div}\ \oplus = \oplus$$

$$\ominus \ \substack{\times \\ \div}\ \ominus = \oplus$$

$$\oplus \ \substack{\times \\ \div}\ \ominus = \ominus$$

$$\ominus \ \substack{\times \\ \div}\ \oplus = \ominus$$

مثال

$$(-3+7)\times(-9+2)=4\times(-7)=-28$$

اولویت عملگرها

در محاسبات ریاضی به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- داخل پرانتز یا کروشه

۲- توان و رادیکال

۳- ضرب و تقسیم از چپ به راست

۴- جمع و تفریق از چپ به راست

مثال

$$1)\ 5-5\times3+3=5-15+3=-7$$

$$2)\ 12\div2\times(-3)+3=6\times(-3)+3=-15$$

$$3)\ 5-(-5)^2-2\times(-3)^3-2^3=5-25-2\times(-27)-8=5-25+54-8=26$$

محاسبه تعداد و مجموع اعداد متوالی با فاصله‌های یکسان

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{بزرگ‌ترین عدد - کوچک‌ترین عدد}}{\text{فاصله دو عدد متوالی}} + ۱$$

$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{کوچک‌ترین عدد} + \text{بزرگ‌ترین عدد})}{۲}$$

مثال

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۵+۸+۱۱+\cdots+۶۲=$$

پاسخ

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{(۶۲-۵)}{۳}+۱=\frac{۵۷}{۳}+۱=۲۰$$

$$۵+۸+۱۱+\cdots+۶۲=\frac{(۵+۶۲)\times \overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}}{\cancel{۲}}=۶۷۰$$

مثال

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۵-۱۱+۱۰-۱۶+۱۵-۲۱+۲۰-۲۶+\cdots+۴۷۰-۴۷۶=$$

پاسخ

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید اگر عبارت را به شکل زیر دسته بندی کنیم، حاصل هر پرانتز برابر (۶-) است. بنابراین:

$$(۵-۱۱)+(۱۰-۱۶)+(۱۵-۲۱)+(۲۰-۲۶)+\cdots+(۴۷۰-۴۷۶)=(-۶)\times \text{تعداد پرانتزها}$$

$$\text{تعداد پرانتزها} = \frac{۴۷۰-۵}{۵}+۱=\frac{۴۶۵}{۵}+۱=۹۴$$

$$\Rightarrow (۵-۱۱)+(۱۰-۱۶)+(۱۵-۲۱)+(۲۰-۲۶)+\cdots+(۴۷۰-۴۷۶)=(-۶)\times ۹۴=-۵۶۴$$

مثال

اگر $a*b=۲a-۳b-۵$ باشد، حاصل $(-۶)*۴$ را حساب کنید.

پاسخ

$$۴*(-۶)=۲\times۴-۳\times(-۶)-۵=۸+۱۸-۵=۲۱$$

اعداد گویا

هر عددی را که بتوان آن را به‌صورت یک کسر که صورت و مخرج آن، عدد صحیح و مخرج آن مخالف صفر باشد، نوشت، یک عدد گویا می‌گویند.

مثال

اعداد ۱/۴، $-\frac{۳}{۴}$، $\frac{۳}{-۵}$، ۱−، و ۰ گویا هستند.

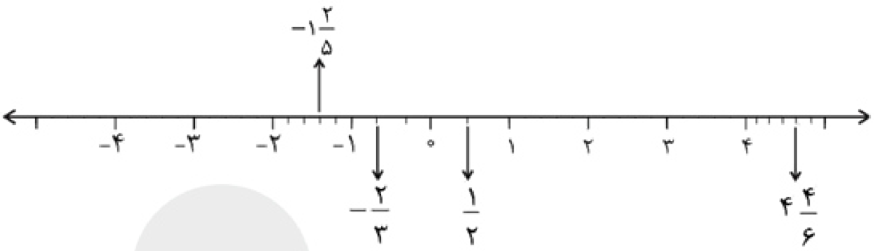
نکته

اعداد $-\frac{۳}{۵}$، $\frac{-۳}{۵}$ و $\frac{۳}{-۵}$ با هم برابرند.

* هر عدد طبیعی، صحیح یا حسابی، عددی گویا است.

***تذکر:** اعداد گویا را می‌توان روی محور اعداد مشخص کرد.

مثال



نکته

اعداد رادیکالی که حاصل جذرشان عددی صحیح نباشد، گویا نیستند.

مثال

اعداد $\sqrt{۲۳}$ و $-\sqrt{۲۷}$ گویا نیستند، اما $\sqrt{۴۹}$ و $-\sqrt{۸۱}$ گویا هستند.

***تذکر:** قرینه اعداد گویا مانند قرینه اعداد صحیح تعریف می‌شود،

مثال

$$-(-۳\frac{۴}{۵})=۳\frac{۴}{۵} \quad , \quad -(\frac{-۲۱}{۲۳})=\frac{۲۱}{۲۳} \quad , \quad -(\frac{-۱۴}{-۹۵})=\frac{-۱۴}{۹۵}$$

کسرهای مساوی

اگر صورت و مخرج کسر را در یک عدد غیر صفر ضرب یا بر یک عدد غیر صفر تقسیم کنیم، کسری مساوی با آن کسر به‌دست می‌آید.

مثال

$$\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}=\frac{-۲۴}{-۳۰}=\frac{۸}{۱۰}$$

نکته

برای هر کسر می‌توان بی‌شمار کسر مساوی با آن نوشت.

ساده کردن کسرها

برای ساده کردن کسرها ابتدا علامت کسر را مشخص می‌کنیم. سپس صورت و مخرج کسر را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم می‌کنیم.

مثال

$$۱)\frac{-۴۸}{۵۶}=\frac{-۶}{۷}$$

$$۲)\frac{(-۷)\times(-۱۲)}{(+۴)\times(-۳۵)}=-\frac{\overset{۱}{\cancel{۷}}\times\overset{۳}{\cancel{۱۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}\times\underset{۵}{\cancel{۳۵}}}=-\frac{۳}{۵}$$

$$۳)\frac{۵-۱۲}{۵-۹}=\frac{-۷}{-۴}=\frac{۷}{۴}$$

$$۴)\frac{(-۱۴)\times(-۱۲)\times(+۱۵)}{-۴۲\times۳۰}=-\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۴}}\times\overset{\overset{۲}{\cancel{۴}}}{\cancel{۱۲}}\times\overset{۱}{\cancel{۱۵}}}{\underset{\underset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۴۲}}\times\underset{\underset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۳۰}}}=-۲$$

نکته

اگر در صورت و مخرج کسری عمل جمع یا تفریق داشته باشیم، نمی‌توان صورت و مخرج را با هم ساده کرد. باید ابتدا حاصل صورت و مخرج را محاسبه کرده و سپس کسر را ساده کنیم.

مثال

$$\frac{-۱۱\times۲-۲}{۶-۲\times۶}=\frac{-۲۲-۲}{۶-۱۲}=\frac{-۲۴}{-۶}=۴$$

نکته

اگر دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را در نظر بگیریم به‌طوری‌که $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$، آن‌گاه $\frac{c}{d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a}{b}$.

مثال

برای دو کسر $\frac{۵}{۶}<\frac{۳}{۴}$ داریم:

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۳+۵}{۴+۶}<\frac{۵}{۶}$$

بنابراین:

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۸}{۱۰}<\frac{۵}{۶}$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۳+۸}{۴+۱۰}<\frac{۸}{۱۰}<\frac{۸+۵}{۱۰+۶}<\frac{۵}{۶}$$

بنابراین:

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۸}{۱۰}<\frac{۱۳}{۱۶}<\frac{۵}{۶}$$

نتیجه: بین هر دو کسر بی‌شمار کسر وجود دارد.

مثال

اگر x عددی صحیح و $-۱۰<x<۱۲$ باشد، مجموع تمام مقادیر ممکن برای x را بیابید.

پاسخ

از آن‌جا که x باید از -۱۰ بزرگ‌تر و از ۱۲ کوچک‌تر باشد، بنابراین x می‌تواند $-۹, -۸, \ldots, ۱۱$ باشد. بنابراین مجموع تمام مقادیر ممکن برای x عبارت است از:

$$\cancel{(-۹)}+\cancel{(-۸)}+\cancel{(-۷)}+\cdots+\cancel{۹}+۱۰+۱۱=۱۰+۱۱=۲۱$$

مثال

اگر x عددی گویا باشد به‌طوری‌که $-۲۳ < x \le -۲$، آن‌گاه کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار x را تعیین کنید.

پاسخ

کوچک‌ترین مقدار x مشخص نیست ولی بزرگ‌ترین مقدار آن ۲- است.

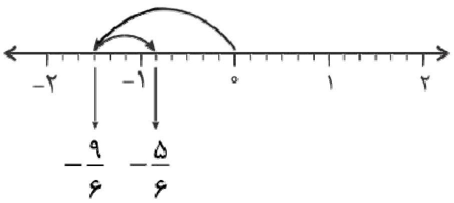
جمع و تفریق اعداد گویا

مثال

حاصل جمع $\frac{۲}{۳}+\frac{-۳}{۲}$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ

می‌دانیم $\frac{-۳\times۳}{۲\times۳}=\frac{-۹}{۶}$ و $\frac{۲\times۲}{۳\times۲}=\frac{۴}{۶}$. بنابراین هر واحد روی محور را به ۶ قسمت تقسیم می‌کنیم.



نکته

برای جمع یا تفریق دو عدد گویا، ابتدا دو عدد را به گونه‌ای می‌نویسیم که مخرج آن‌ها مثبت باشد، سپس به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

۱- اگر مخرج‌ها مساوی باشند، یکی از مخرج‌ها را نوشته و صورت‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم.

۲- اگر مخرج‌ها مساوی نباشند، ک.م.م مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر گرفته و سپس حاصل جمع یا تفریق را حساب می‌کنیم.

مثال

حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-\frac{۴}{۷}+(-\frac{۹}{۷})=$

ب) $-\frac{۵}{۴}+\frac{۷}{۱۲}=$

ج) $-\frac{۶}{۱۵}-\frac{-۹}{۱۲}=$

پاسخ

الف) $-\frac{۴}{۷}+(-\frac{۹}{۷})=\frac{-۴-۹}{۷}=\frac{-۱۳}{۷}$

ب) $-\frac{۵\times۳}{۴\times۳}+\frac{۷}{۱۲}=\frac{-۱۵+۷}{۱۲}=\frac{-۸}{۱۲}=\frac{-۲}{۳}$

ج) $\frac{-۶\times۴}{۱۵\times۴}-\frac{-۹\times۵}{۱۲\times۵}=\frac{-۲۴-(-۴۵)}{۶۰}=\frac{-۲۴+۴۵}{۶۰}=\frac{۲۱}{۶۰}=\frac{۷}{۲۰}$

مثال

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}-(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}-(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵})=$$

پاسخ

داریم:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}=۰$$

مثال

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(-۵/۲۳)-\frac{۱۹}{۲۰}-(-۴/۱)=$$

پاسخ

$$(-۵/۲۳)-\frac{۱۹}{۲۰}-(-۴/۱)=\frac{-۵۲۳}{۱۰۰}-\frac{۱۹\times۵}{۲۰\times۵}+\frac{۴۱\times۱۰}{۱۰\times۱۰}=\frac{-۵۲۳-۹۵+۴۱۰}{۱۰۰}=\frac{-۲۰۸}{۱۰۰}=-۲/۰۸$$

ضرب اعداد گویا

در ضرب اعداد گویا ابتدا علامت حاصل را تعیین کرده و سپس صورت‌ها و مخرج‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم. برای یافتن حاصل‌ضرب، صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم. اگر $d\neq ۰$ و b باشد، داریم:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

مثال

$$(-\frac{-۱۵}{۴۲})\times(\frac{-۴۹}{۴۵})=-\frac{\cancel{۱۵}^{۱}}{\cancel{۴۲}_{۶}}\times\frac{\cancel{۴۹}^{۷}}{\cancel{۴۵}_{۳}}=-\frac{۷}{۱۸}$$

*تذکر: در ضرب دو عدد مخلوط ابتدا آن‌ها را به کسر تبدیل می‌کنیم.

مثال

$$۳\frac{۱}{۲}\times(-۴\frac{۱}{۵})=\frac{۷}{۲}\times\frac{-۲۱}{۵}=-\frac{۷}{۲}\times\frac{۲۱}{۵}=-\frac{۱۴۷}{۱۰}$$

تقسیم اعداد گویا

در تقسیم دو عدد گویا کافی است عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب کنیم. به طوری‌که اگر $0 \neq d$ و c و b باشند، داریم:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

*تذکر: برای معکوس کردن عدد مخلوط ابتدا آن را به کسر بزرگ‌تر از واحد تبدیل می‌کنیم.

تمرین

معکوس عدد $-۴\frac{۱}{۳}$ را بیابید.

پاسخ

$$-۴\frac{۱}{۳}=\frac{-۱۳}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس}}-\frac{۳}{۱۳}$$

مثال

$$۱)\ -۳\frac{۱}{۸}\div۲\frac{۱}{۱۲}=-\frac{۲۵}{۸}\div\frac{۲۵}{۱۲}=-\frac{\cancel{۲۵}}{۸}\times\frac{۱۲}{\cancel{۲۵}}=-\frac{۱۲}{۸}=-\frac{۳}{۲}$$

$$۲)\ (-\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}\times۰/۰۵)\div۰/۲۹=(-\frac{۳}{۵}+\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۵}_{۱}}\times\frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۱۰۰}_{۵۰}})\div\frac{۲۹}{۱۰۰}$$

$$=(-\frac{۳\times۱۰}{۵\times۱۰}+\frac{۱}{۵۰})\div\frac{۲۹}{۱۰۰}=\frac{\cancel{-۲۹}^{۱}}{\cancel{۵۰}_{۱}}\times\frac{\cancel{۱۰۰}^{۲}}{\cancel{۲۹}_{۱}}=-۲$$

*تذکر: معکوس ۱ و ۱- برابر خودشان است و تنها عددی که معکوس ندارد، صفر است.

نکته

حاصل تقسیم یک بر هر عدد برابر با معکوس آن عدد است.

$$1\div(\frac{a}{b})=\frac{b}{a}$$

مثال

$$1\div(-\frac{4}{3})=1\times(-\frac{3}{4})=\frac{-3}{4}$$

نکته

حاصل تقسیم (۱-) بر هر عدد برابر با قرینه معکوس آن عدد است.

$$-1\div(\frac{a}{b})=-\frac{b}{a}$$

مثال

$$-1\div(3\frac{1}{4})=-1\times\frac{4}{13}=\frac{-4}{13}$$

نکته

قاعده دور در دور، نزدیک در نزدیک

برای به‌دست آوردن حاصل عبارت‌هایی نظیر $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ راه سریعی وجود دارد کـه بـه آن قاعـده دور در دور، نزدیـک در نزدیـک گفته می‌شود. در این روش کافی است به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\text{دور}\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\ \text{نزدیک} = \frac{a\times d}{b\times c}$$

مثال

$$1)\ \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{6}{21}}=-\frac{21\times\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}\times 4}=-\frac{21}{8}$$

$$2)\ \frac{3}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{3}^{1}\times 2}{\cancel{3}_{1}\times 1}=\frac{2}{1}$$

$$3)\ [\frac{5}{2}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}]\div[\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}]=[\frac{5}{2}-\frac{1}{\frac{1}{2}}]\div[\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}]=\frac{1}{2}\div[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}]=\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{1}=3$$

$$4)\ \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2-\frac{1}{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

مثال

اگر $A=[\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\cdots+\frac{80}{81}]+[\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\cdots+\frac{81}{80}]$، آن‌گاه کمترین مقدار A را بیابید.

پاسخ

کروشه‌ی دومی و اولی را به ترتیب شکل زیر می نویسیم:

$$(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{4})+(1+\frac{1}{6})+\cdots+(1+\frac{1}{80})=40+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{80})$$

$$(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{5})+(1-\frac{1}{7})+\cdots+(1-\frac{1}{81})=40-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{81})$$

پس:

$$A=40+40+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{80}-\frac{1}{81})$$

حاصل هر پرانتز عددی کمتر از واحد است. پس مجموع ۴۰ پرانتز کمتر از ۴۰ است. یعنی: $80\le A<120$.

مثال

فروشنده‌ای کالایی را ۲۷۰۰ تومان خرید. او بهای فروش کالا را چند تومان قرار دهد تا پس از ۱۰ درصد تخفیف آن را با ۱۰ درصد سود فروخته باشد؟

پاسخ

سود $2700\times\frac{10}{100}=270$

$$2700+270=2970\rightarrow 100\%-10\%=90\%\rightarrow\frac{90}{100}=\frac{2970}{x}\rightarrow x=\frac{100\times 2970}{90}=3300$$

مثال

کارگری $\frac{۱}{۳}$ کار خود را قبل از ظهر و $\frac{۳}{۴}$ از باقی مانده‌ی آن را بعد از ظهر به پایان رسانید. چه کسری از کـار او بـاقی مانده است؟

پاسخ

کار انجام شده‌ی قبل از ظهر $= \frac{۱}{۳}$

کار باقی مانده‌ی قبل از ظهر $= ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

کار انجام شده در بعد از ظهر $= \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}$

کل کار انجام شده $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow$ کار باقی مانده $= ۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$

مثال

۶۸ درصد از جمعیت واجد شرایط شهری، کارت شناسایی ملی خود را دریافت کرده‌اند. $\frac{۱}{۸}$ بقیه شـماره ملـی خـود را می‌دانند و $\frac{۳}{۴}$ بقیه از الزامی بودن دریافت کد ملی مطلع‌اند. به چند درصد این جمعیت اطلاعاتی ارسال نشده است؟

پاسخ

$\%۱۰۰ - \%۶۸ = \%۳۲$

$\%۳۲ \times \frac{۱}{۸} = \%۴$

$\%۳۲ - \%۴ = \%۲۸$

$\%۲۸ \times \frac{۳}{۴} = \%۲۱$

$\%۲۸ - \%۲۱ = \%۷$

فصل دوم: عددهای اول

تعریف

هر عدد طبیعی که فقط و فقط دو شمارنده داشته باشد را عدد اول می‌گوییم. به عبارت دیگر عدد اول فقط بر خـودش و ۱ بخش‌پذیر است.

مثال

اعداد ۲، ۱۱، ۱۳، ۱۹ و ۴۱ اعداد اول‌اند.

نکته

تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است.

مثال

دو عدد اول بیابید که اختلاف آن‌ها ۱۲۳۵ باشد.

پاسخ

می‌دانیم در صورتی اختلاف دو عدد، عددی فرد خواهد شد که یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج باشد. از آن‌جا که تنها عـدد اول زوج، عدد ۲ است، پس یکی از عددها ۲ و دیگری ۱۲۳۷ است.

نکته

هرگاه مجموع یا اختلاف دو عدد اول، عددی فرد باشد، حتماً یکی از آن‌ها، ۲ است.

تعریف: هر عدد طبیعی که بیش از دو شمارنده داشته باشد را عدد مرکب می‌گوییم. به عبارت دیگـر هـر عـدد مرکـب را می‌توان به‌صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت.

مثال

اعداد ۶، ۹۶، ۴۵۲۵ و ۵۱ اعداد مرکب هستند.

***تذکر:** ۱ نه اول است و نه مرکب.

نکته

۱) تعداد مضرب‌های طبیعی هر عدد، نامتناهی است.

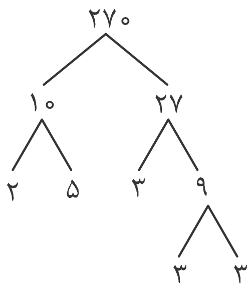
۲) تمام مضرب‌های یک عدد مرکب، مرکب‌اند.

۳) اگر یک عدد بر عدد دیگری بخش‌پذیر باشد، ب.م.م آن‌ها، عدد کوچک‌تر و ک.م.م آن‌ها برابر با عدد بزرگ‌تر است.

مثال

عدد ۲۷۰ را تجزیه کنید و آن را به‌صورت حاصل‌ضرب شمارنده‌های اولش بنویسید.

پاسخ



$۲۷۰=۳^{۳}\times۲\times۵$

تعریف: اگر توان همه شمارنده‌های اول یک عدد طبیعی بعد از تجزیه، زوج باشند، به آن عدد، مجذور کامل می‌گوییم.

مثال

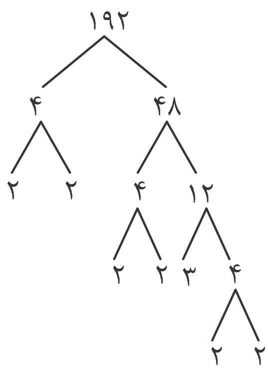
اعداد ۱۶۹ و ۴۹۰۰ مجذور کامل هستند زیرا:

$$۱۶۹=۱۳^{۲} \quad , \quad ۴۹۰۰=۷^{۲}\times۵^{۲}\times۲^{۲}$$

مثال

عدد ۱۹۲ را حداقل در چه عددی ضرب کنیم تا حاصل مجذور کامل شود؟

پاسخ



داریم:

$۱۹۲=۲^{۶}\times۳$

بنابراین توان ۳، عددی فرد است و برای این که عدد مورد نظر مجذور کامل شود، باید حداقل در عدد ۳ ضرب شود.

نکته

ب.م.م دو عدد اول برابر با یک است و ک.م.م آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب دو عدد است.

تعریف: اگر ب.م.م دو عدد برابر با ۱ باشد، یعنی آن دو عدد شمارنده مشترکی به غیر از یک نداشته باشند، آن دو عدد را متباین یا نسبت به هم اول می‌گوییم.

مثال

دو عدد ۱۶ و ۲۷ نسبت به هم اولند.

مثال

مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که دو عدد ۸۱ و $۲^{۷} \times ۳^{a-۲}$ نسبت به هم اول باشند.

پاسخ

از آن‌جا که $۳^{۴} = ۸۱$ و این دو عدد نسبت به هم اولند، نباید شمارنده مشترکی بجز ۱ داشته باشند، بنابراین:

$$a - ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = ۲$$

تعداد شمارنده‌های یک عدد

برای تعیین تعداد شمارنده‌های یک عدد کافی است پس از تجزیه عدد، توان هر یک از شمارنده‌های اول را با یک جمع کرده و حاصل جمع‌ها را در هم ضرب کنیم.

مثال

تعداد شمارنده‌های اعداد ۸۸ و ۲۴۰ را تعیین کنید.

پاسخ

$$۸۸ = ۲^{۳} \times ۱۱ \quad \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۳+۱)(۱+۱) = ۸$$

$$۲۴۰ = ۲^{۴} \times ۳ \times ۵ \quad \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۴+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۲۰$$

مثال

عدد ۱۲۸ چند شمارنده مرکب دارد؟

پاسخ

$$۱۲۸ = ۲^{۷} \quad \Rightarrow \quad \text{تعداد شمارنده‌ها} = ۸$$

که از بین این شمارنده‌ها یکی از آن‌ها ۲ می‌باشد که اول است و یکی هم ۱. بنابراین $۸ - ۲ = ۶$ شمارنده مرکب دارد.

مثال

بزرگ‌ترین عدد اول که شمارنده عدد ۶ رقمی $\overline{ababab}$ می‌تواند باشد، چیست؟

پاسخ

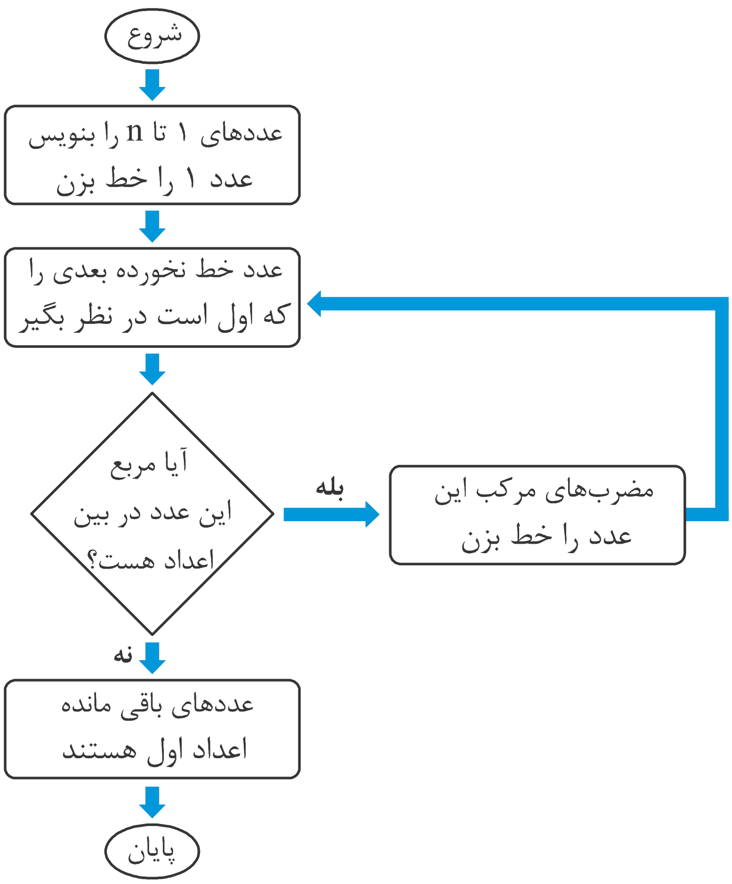
$$\overline{ababab}=۱۰۰۰۰\overline{ab}+۱۰۰\overline{ab}+\overline{ab}=۱۰۱۰۱\overline{ab}=۳\times۷\times۱۳\times۳۷\overline{ab}$$

بنابراین اگر $\overline{ab}$ را بزرگترین عدد اول ۲ رقمی فرض کنیم، جواب عدد ۹۷ است.

روش‌های تعیین عددهای اول

روش غربال

برای مشخص کردن اعداد اول از ۱ تا n از روش غربال استفاده می‌کنیم. این روش در الگوریتم زیر آورده شده است.



مثال

در یافتن اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰، ۵۴ اُمین عددی که خط می‌خورد، چه عددی است؟

پاسخ

اولین عددی که در الگوریتم غربال خط می‌خورد، ۱ است، بعد از آن باید تمام مضرب‌های ۲ به غیر از خودش را خط بزنیم که تعداد آن‌ها ۴۹ تا است. تا این جا ۵۰ عدد خط خورده‌اند. در مرحله بعدی باید مضرب‌هایی از ۳، به جز خودش را که قبلاً

خط نخورده‌اند، خط بزنیم که ۹ ، ۱۵، ۲۱ خط می‌خورند. بنابراین عدد ۵۴ ام، ۲۷ است.

تشخیص اول بودن یك عدد

برای تشخیص اول بودن یک عدد کافی است بخش‌پذیری آن را بر اعداد اولی (از کوچک به بزرگ) امتحان کنیم که مربع آن اعداد، از عدد داده شده، بزرگ‌تر نباشد.

مثال

آیا عدد ۱۰۱ اول است؟

پاسخ

$۱۰۱ > ۲^۲$، $۱۰۱ > ۳^۲$، $۱۰۱ > ۵^۲$، $۱۰۱ > ۷^۲$ و $۱۰۱ < ۱۱^۲$. بنابراین کافی است، بخش‌پذیری ۱۰۱ را فقط بر اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ بررسی کنیم. از آن‌جا که ۱۰۱ بر این اعداد بخش‌پذیر نیست، پس عددی اول است.

فصل سوم: چندضلعی‌ها

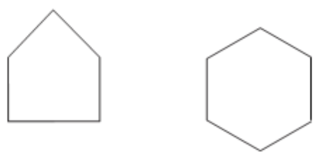
تعریف: هر خط شکسته بسته یک چندضلعی است، به شرط آن‌که ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند، مگـر در رأس‌هـا کـه دو ضلع به هم می‌رسند.

تعریف: اگر در یک چندضلعی تمام ضلع‌ها با هم و تمام زاویه‌ها نیز با هم برابر باشند، به آن چندضلعی، منتظم گوییم.

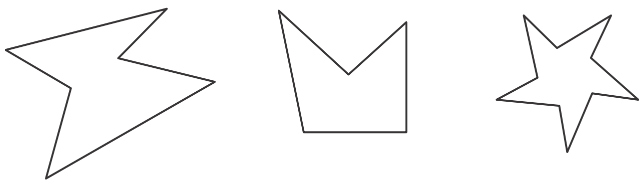
مثال

مثلث متساوی الاضلاع سه‌ضلعی منتظم و مربع یک چهارضلعی منتظم است.

چندضلعی محدب (کوژ): به چندضلعی که تمام زوایای آن از ۱۸۰° کوچک‌تر باشد، چندضلعی محدب می‌گوییم. مانند:



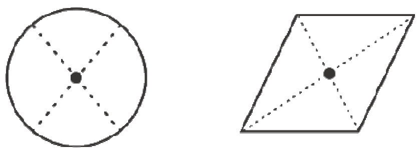
چندضلعی مقعر (کاو): به چندضلعی که حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از ۱۸۰° داشته باشد، چندضلعی مقعر می‌گوییم. مانند:



مرکز تقارن چندضلعی

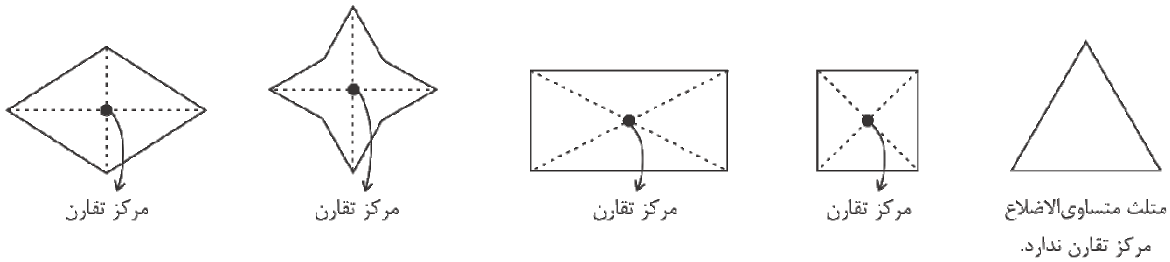
مرکز تقارن یک شکل نقطه‌ای است که قرینه هر نقطه از شکل نسبت به آن نقطه بر خود شکل منطبق می‌شود.

در واقع مرکز تقارن یک شکل نقطه‌ای مانند O است که اگر از هر نقطه از شکل به آن وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم، به نقطه‌ای روی شکل برسیم. برای مثال مرکز یک دایره و محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن آن‌ها است.



مثال

مرکز تقارن هر یک از شکل‌های زیر را در صورت وجود، مشخص می‌کنیم:



نکته

۱- هر شکل حداکثر یک مرکز تقارن دارد.

۲- هیچ یک از انواع مثلث، مرکز تقارن ندارند.

۳- در n ضلعی منتظم اگر n فرد باشد، تعداد محورهای تقارن آن برابر با تعداد اضلاعش (یعنی n) است ولی مرکز تقارن ندارد.

۴- در n ضلعی منتظم اگر n زوج باشد، تعداد محورهای تقارن آن برابر با تعداد اضلاعش (یعنی n) است و مرکز تقارن آن همان محل برخورد محورهای تقارنش است.

مثال

۷ضلعی منتظم، ۷ محور تقارن دارد ولی مرکز تقارن ندارد.

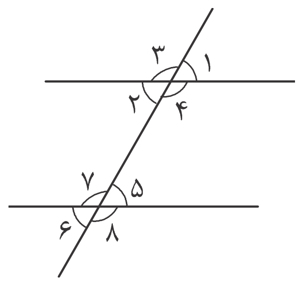
توازی و تعامد

نمادها و قراردادها

اگر دو خط d و d' موازی باشند، می‌نویسیم $d \parallel d'$ و در غیر این‌صورت می‌نویسیم $d \nparallel d'$.

اگر خط d بر خط L، عمود باشد می‌نویسیم $d \perp L$.

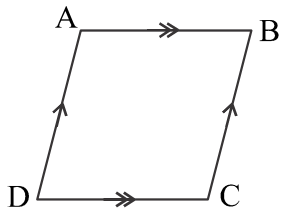
اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، هشت زاویه به‌وجود می‌آید که چهار زاویه تند با هم و چهار زاویه باز بـه‌وجـود آمده نیز با هم برابرند و زاویه‌های باز، مکمل زاویه‌های تند هستند.



$$\hat{۱}=\hat{۲}=\hat{۵}=\hat{۶}$$
$$\hat{۳}=\hat{۴}=\hat{۷}=\hat{۸}$$
$$\hat{۱}+\hat{۷}=۱۸۰^\circ$$

دسته‌بندی چهارضلعی‌ها

متوازی‌الاضلاع: چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی باشند.



خواص متوازی‌الاضلاع

۱- در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل با هم مساوی‌اند.

۲- در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل با هم برابرند.

۳- در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل هستند.

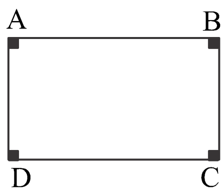
۴- در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و محل برخورد قطرها مرکز تقارن آن است.

***تذکر: توجه کنید در متوازی‌الاضلاع لزوماً قطرها با هم برابر نیستند.**

نکته

مستطیل، مربع و لوزی چون اضلاع مقابلشان دو به دو با هم موازی و مساوی است، متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین خواص متوازی‌الاضلاع را نیز دارا هستند. در واقع این شکل‌ها نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.

مستطیل

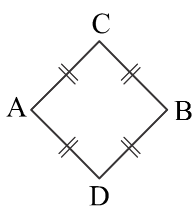


متوازی‌الاضلاعی است که تمام زوایای آن قائمه است.

خواص مستطیل

مستطیل خواص متوازی الاضلاع را دارد. به علاوه در مستطیل قطرها با یکدیگر برابرند.

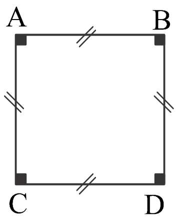
لوزی



متوازی‌الاضلاعی که چهار ضلع مساوی داشته باشد را لوزی می‌گوییم.

خواص لوزی

لوزی خواص متوازی‌الاضلاع را دارد به‌علاوه در لوزی قطرها بر هم عمودند.



مربع

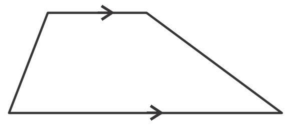
متوازی‌الاضلاعی که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه قائمه دارد را مربع گوییم.

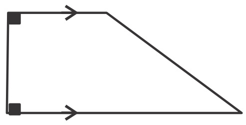
خواص مربع

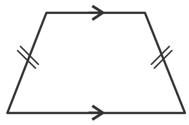
مربع تمام خواص مستطیل و لوزی را دارا است.

ذوزنقه

به هر چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی داشته باشد، ذوزنقه گوییم.


ذوزنقه مختلف‌الاضلاع

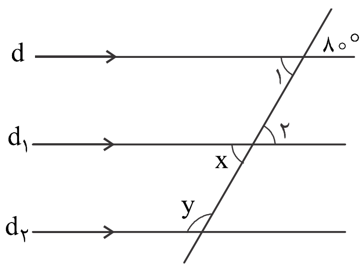

ذوزنقه قائم‌الزاویه


ذوزنقه متساوی‌الساقین

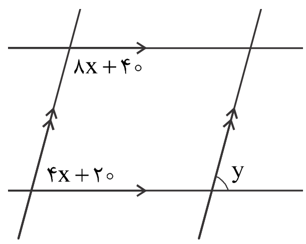
در ذوزنقه زوایای مجاور به ساق‌ها مکمل یکدیگرند.

مثال

در شکل‌های زیر اندازه زاویه‌های x و y را بیابید.



(الف)



(ب)

پاسخ

الف)

$$\hat{۱}=۸۰^\circ \quad , \quad d \parallel d_۱ \quad \Rightarrow \quad \hat{۲}=۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{x}=۸۰^\circ$$

$$d_۱ \parallel d_۲ \Rightarrow \quad \hat{y}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

ب)

$$۸x+۴۰^\circ+۴x+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \quad ۱۲x=۱۲۰^\circ \quad \Rightarrow \quad x=۱۰^\circ$$

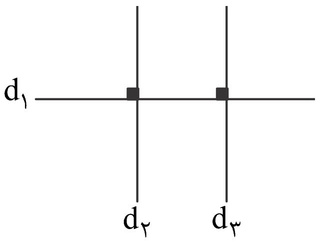
$$\Rightarrow \quad \hat{y}=۴x+۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

اصول توازی اقلیدس

موارد زیر از مهم‌ترین نظریات اولیه هندسه اقلیدسی می‌باشند:

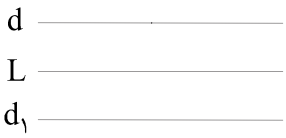
۱) از یک نقطه خارج یک خط تنها یک خط، عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

۲) دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.



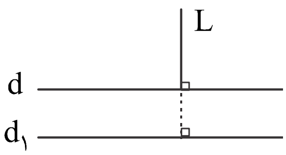
$$\left.\begin{array}{l} d_۲ \perp d_۱ \\ d_۳ \perp d_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow d_۲ \parallel d_۳$$

۳) دو خط موازی با یک خط خود با هم موازی‌اند.



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel L \\ d_۱ \parallel L \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel d_۱$$

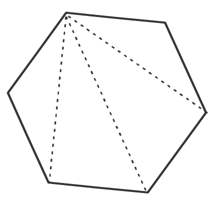
۴) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود، بر دیگری هم عمود است.



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel d_۱ \\ L \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow L \perp d_۱$$

زاویه‌های داخلی

از آن‌جا که هر n ضلعی را می‌توان به $n-۲$ مثلث با رأس مشترک تقسیم کرد، برای مثال:



بنابراین مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی با n رأس برابر است با:

$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

مثال

مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی برابر ۱۶۲۰ درجه است، این چند ضلعی چند رأس دارد؟

پاسخ

$$n-۲=۱۶۲۰\div ۱۸۰=۹ \quad \Rightarrow \quad n=۱۱$$

زاویه تمام صفحه: زاویه‌ای که اضلاعش بر هم منطبق است را زاویه تمام صفحه می‌گوییم و زاویه تمام صفحه برابر بـا ۳۶۰° است.

زاویه مقعر (کاو): زاویه‌ای که اندازه آن از ۱۸۰° بیشتر و از ۳۶۰° کمتر باشد را مقعر گوییم.

زاویه محدب (کوژ): زاویه‌ای که اندازه آن از ۱۸۰° کمتر باشد را محدب گوییم.

نکته

اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با $\dfrac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$.

فصل چهارم: جبر و معادله

درس سوم: تجزیه عبارت‌های جبری

تبدیل یک عبارت جبری به ضرب:

برای تبدیل یک عبارت جبری به ضرب، کافی است عامل مشترک تمام جمله‌ها را یافته، سپس تک تک جملات را بر عامل مشترک آن‌ها تقسیم کرده و حاصل را داخل پرانتز بنویسیم، حاصل ضرب عامل مشترک در این پرانتز برابر با عبارت اولیه خواهد بود.

توجه کنید برای یافتن عامل مشترک، ب.م.م ضرایب را به عنوان ضرایب عامل مشترک و حروف مشترک با کمترین توان را به عنوان عامل مشترک در نظر می‌گیریم.

مثال

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ab, ac

ب) $ab, -ad$

ج) $۸a^۳b, ۲a^۲b^۲$

پاسخ

الف) $ab, ac \xrightarrow{\text{ب.م.م}} a$

ب) $ab, -ad \xrightarrow{\text{ب.م.م}} a$

ج) $۸a^۳b, ۲a^۲b^۲ \xrightarrow{\text{ب.م.م}} ۲a^۲b$

مثال

عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

الف) $ab + ac = ?$

ب) $۱۲a^۲bc^۳ - ۱۶a^۲b^۲ = ?$

پاسخ

الف) $ab + ac = a(\frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}) = a(b + c)$

ب) $۱۲a^۲bc^۳ - ۱۶a^۲b^۲ = ۴a^۲b(\frac{۱۲a^۲bc^۳}{۴a^۲b} - \frac{۱۶a^۲b^۲}{۴a^۲b}) = ۴a^۲b(۳c^۳ - ۴b)$

همان‌طور که ملاحظه شد، فاکتورگیری، عکس عمل خاصیت پخشی است.

مثال

عبارت زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$B = ۳a^{۷} + ۲a^{۵} - a^{۴}$$

پاسخ

$$B = a^{۴}(۳a^{۳} + ۲a - ۱)$$

مثال

عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب چند عبارت دیگر بنویسید.

الف) $۴a^{۲}b^{۴}c^{۶} - ۶a^{۶}b^{۴}c^{۲} + ۲a^{۴}b^{۶}c^{۲} = ?$

ب) $b(a+۳) + ۲(a+۳) = ?$

ج) $۴x^{۳}y^{۲} - ۸xy^{۵} - ۱۶xy = ?$

د) $۸x^{۳} - ۴x^{۲} = ?$

هـ) $۸x^{۳}y^{۴} - ۹x^{۵}y = ?$

و) $۴x(x-۲) - ۳y(x-۲) = ?$

پاسخ

الف) $۴a^{۲}b^{۴}c^{۶} - ۶a^{۶}b^{۴}c^{۲} + ۲a^{۴}b^{۶}c^{۲} = ۲a^{۲}b^{۴}c^{۲}(۲c^{۴} - ۳a^{۴} + a^{۲}b^{۲})$

ب) $b(a+۳) + ۲(a+۳) = (a+۳)(b+۲)$

ج) $۴x^{۳}y^{۲} - ۸xy^{۵} - ۱۶xy = ۴xy(\frac{۴x^{۳}y^{۲}}{۴xy} - \frac{۸xy^{۵}}{۴xy} - \frac{۱۶xy}{۴xy}) = ۴xy(x^{۲}y - ۲y^{۴} - ۴)$

د) $۸x^{۳} - ۴x^{۲} = ۴x^{۲}(\frac{۸x^{۳}}{۴x^{۲}} - \frac{۴x^{۲}}{۴x^{۲}}) = ۴x^{۲}(۲x - ۱)$

هـ) $۸x^{۳}y^{۴} - ۹x^{۵}y = x^{۳}y(۸y^{۳} - ۹x^{۲})$

و) $۴x(x-۲) - ۳y(x-۲) = (x-۲)(۴x - ۳y)$

درس چهارم: معادله

معادله: به تساوی جبری که به ازای برخی مقادیر عددی درست و برقرار باشد، معادله می‌گویند. بـه مقـادیری از متغیرهـا کـه ایـن تساوی را برقرار می‌کنند، جواب‌های معادله می‌گوییم.

روش حل معادله:

برای حل معادله ابتدا دو طرف معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم. سپس جملات را به گونه‌ای جابجا می‌کنیم که جملات مجهول در یک طرف معادله و جملات معلوم در طرف دیگر آن قرار گیرند. توجه کنید که با جابجایی یک جمله از طرف معادله به طرف دیگر آن، علامت آن جمله تغییر می‌کند. هنگامی که جملات معلوم در یک طرف و جملات مجهول در طرف دیگر معادله قرار گرفتند، جواب معادله برابر است با جمله معلوم تقسیم بر ضریب مجهول.

مثال

معادله زیر را حل کنید.

$$4(x-2(-x+4))-3(x-2)=7x+6$$

پاسخ

$$4(\overset{3x}{\cancel{x+2x}}-8)-3x+\cancel{6}=7x+\cancel{6} \Rightarrow 12x-32-3x=7x \Rightarrow 9x-32=7x$$
$$\Rightarrow 2x=32 \Rightarrow x=16$$

حل معادلات کسری:

در معادلات کسری می‌توان با ضرب دو طرف معادله در ک.م.م مخرج‌ها، معادله را از حالت کسری درآورد و به یک معادله با ضرایب صحیح تبدیل کرد.

مثال

معادله‌های کسری زیر را حل کنید.

الف) $\frac{3x+1}{6}-\frac{2}{3}=5$

ب) $\frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(1-x)}{3}=\frac{22}{3}$

ج) $\frac{x}{6}+\frac{1}{3}x-12=-x$

پاسخ

الف) $۶(\frac{۳x+۱}{۶}-\frac{۲}{۳}=۵) \Rightarrow ۳x+\underbrace{۱-۴}_{-۳}=۳۰$

$$۳x=۳۰+۳ \Rightarrow ۳x=۳۳ \Rightarrow x=\frac{۳۳}{۳} \Rightarrow x=۱۱$$

ب) دو طرف معادله را در $۶=۳\times۲$ ضرب می‌کنیم.

$$۶(\frac{۳(x+۱)}{۲}-\frac{۲(۱-x)}{۳})=\frac{۲۲}{۳}\times۶ \quad \Rightarrow \quad ۹(x+۱)-۴(۱-x)=۴۴$$

$$\Rightarrow \quad ۹x+۹-۴+۴x=۴۴ \quad \Rightarrow \quad ۱۳x+۵=۴۴ \quad \Rightarrow \quad ۱۳x=۳۹ \quad \Rightarrow \quad x=\frac{۳۹}{۱۳}=۳$$

ج) $\frac{x}{۶}+\frac{۱}{۳}x-۱۲=-x \Rightarrow \frac{x}{۶}+\frac{۲x}{۶}-\frac{۷۲}{۶}=\frac{-۶x}{۶}$

$$\Rightarrow (\frac{x+۲x+۶x}{۶})=۱۲ \Rightarrow \frac{۹x}{۶}=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۱۲\times۶}{۹}=\frac{۷۲}{۹}=۸$$

در حل معادلات کسری که به‌صورت تناسب هستند، می‌توان با استفاده از طرفین وسطین، معادله را از حالت کسری خارج کرد.

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲x-۵}{-۳x-۴}=\frac{۲}{۳}$

ب) $\frac{x+۳}{۲}=\frac{۶x-۲}{۵}$

پاسخ

الف) $\frac{۲x-۵}{-۳x-۴}=\frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow \quad ۳(۲x-۵)=۲(-۳x-۴)$

$$\Rightarrow \quad ۶x-۱۵=-۶x-۸ \quad \Rightarrow \quad ۱۲x=۷ \quad \Rightarrow \quad x=\frac{۷}{۱۲}$$

ب) $\frac{x+۳}{۲}=\frac{۶x-۲}{۵} \Rightarrow ۵(x+۳)=۲(۶x-۲) \Rightarrow ۵x+۱۵=۱۲x-۴$

$$\Rightarrow ۵x-۱۲x=-۱۵-۴ \Rightarrow -۷x=-۱۹ \Rightarrow x=\frac{۱۹}{۷}=۲\frac{۵}{۷}$$

معادلات توانی: اگر یک معادله مجهول، در توان یک عدد باشد، به آن معادله، معادله توانی می‌گوییم.

برای حل یک معادله توانی، ابتدا سعی می‌کنیم دو طرف آن را به شکلی بنویسیم که پایه‌های برابر داشته باشند. (بهتر است این پایه‌ها اعداد اول باشند) سپس از برابری پایه‌های آن‌ها ، تساوی توان‌ها را نتیجه می‌گیریم و معادله را حل می‌کنیم تا مجهول به دست آید.

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲^{۲x+۳}=۲^{۱۱}$

ب) $۲^{۸x-۲}=۴^{۳}$

ج) $۳^{x+۳}=۹^{x-۱}$

پاسخ

الف) $۲^{۲x+۳}=۲^{۱۱} \Rightarrow ۲x+۳=۱۱ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴$

ب) $۲^{۸x-۲}=۴^{۳} \Rightarrow ۲^{۸x-۲}=(۲^{۲})^{۳} \Rightarrow ۲^{۸x-۲}=۲^{۶} \Rightarrow ۸x-۲=۶ \Rightarrow ۸x=۸ \Rightarrow x=۱$

ج) $۳^{x+۳}=(۳^{۲})^{x-۱}=۳^{۲x-۲}$

$\Rightarrow ۳^{x+۳}=۳^{۲x-۲} \Rightarrow x+۳=۲x-۲ \Rightarrow x-۲x=-۲-۳$

$\Rightarrow -x=-۵ \Rightarrow x=۵$

تشکیل معادله برای مسئله‌های مختلف

مثال

مجموع سن پدر و پسری ۵۷ سال است. اگر سن پدر ۳ سال از دو برابر سن پسر بیشتر باشد، سن پدر چقدر است؟

پاسخ

اگر سن پسر را x در نظر بگیریم داریم:

سن پدر : $۲x+۳$

$\Rightarrow (۲x+۳)+x=۵۷ \Rightarrow ۳x+۳=۵۷ \Rightarrow ۳x=۵۴ \Rightarrow x=۱۸$

$\Rightarrow ۲\times۱۸+۳=۳۹$ سن پدر

مثال

میانگین چهار عدد زوج متوالی ۲۳ است. عدد بزرگ‌تر را بیابید.

پاسخ

اگر عدد کوچک را x بنامیم داریم:

$$\frac{x+(x+۲)+(x+۴)+(x+۶)}{۴}=۲۳ \Rightarrow \frac{۴x+۱۲}{۴}=۲۳ \Rightarrow \frac{\cancel{۴}(x+۳)}{\cancel{۴}}=۲۳$$

$\Rightarrow x+۳=۲۳ \Rightarrow x=۲۰ \Rightarrow x+۶=۲۶$ عدد بزرگ‌تر

مثال

محیط مستطیلی که طول آن $\frac{۳}{۲}$ برابر عرض آن است، ۸۰ می‌باشد. مساحت مستطیل چقدر است؟

پاسخ

x : عرض و $\frac{۳}{۲}x$: طول

محیط : $۲(x+\frac{۳}{۲}x)=۸۰ \quad \Rightarrow \quad ۲x+۳x=۸۰ \Rightarrow ۵x=۸۰$

$\Rightarrow \quad x=۱۶$ عرض

طول $=\frac{۳}{۲}\times ۱۶=۲۴$

مساحت مستطیل: $۲۴\times ۱۶=۳۸۴$

مثال

زهرا ۱۱ سال و برادرش علی ۳ سال دارد. چند سال دیگر سن زهرا ۳ برابر سن برادرش می‌شود؟

پاسخ

فرض کنیم پس از x سال چنین اتفاقی رخ دهد. در آن زمان زهرا $x+۱۱$ سال و علی $x+۳$ سال دارد.

$۱۱+x=۳(۳+x) \quad \Rightarrow ۱۱+x=۹+۳x \quad \Rightarrow \quad ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$

مثال

مجموع $\frac{۲}{۳}$ عددی با $\frac{۳}{۴}$ همان عدد و دو برابر آن عدد ۸۲ می‌باشد. آن عدد چند است؟

پاسخ

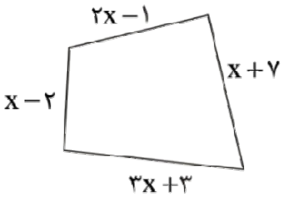
عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۲}{۳}x+\frac{۳}{۴}x+۲x=۸۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{۸x+۹x+۲۴x}{۱۲}=۸۲$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۴۱x}{۱۲}=۸۲ \quad \Rightarrow \quad x=۸۲\times\frac{۱۲}{۴۱}=۲۴$$

مثال

محیط شکل زیر ۳۵ است. طول اضلاع این شکل را به دست آورید.



پاسخ

$$۲x-۱+x-۲+۳x+۳+x+۷=۳۵ \Rightarrow ۷x+۷=۳۵$$

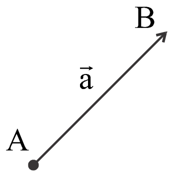
$$\Rightarrow ۷x=۳۵-۷=۲۸ \Rightarrow x=\frac{۲۸}{۷}=۴$$

طول اضلاع برابر است با : ۲,۷,۱۱,۱۵

فصل پنجم: بردار و مختصات

درس اول: جمع بردارها

بردار: بردار پاره‌خطی است جهت‌دار که معمولاً آن را با دو حرف ابتدا و انتهایش مشخص می‌کنند ولی گاهی بـردار را بـا یـک حـرف کوچک انگلیسی هم مشخص می‌کنند مانند: $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{a}$

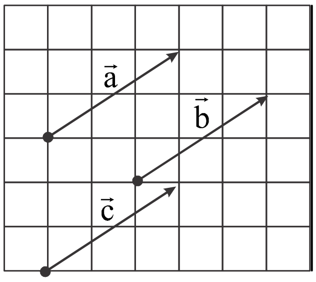


تذکر: در واقع هر بردار به منزله یک انتقال است از نقطه ابتدای آن بردار به نقطه انتهای آن.

بردارهای مساوی (هم سنگ): دو بردار هم‌جهت، هم‌اندازه و هم راستا را دو بردار مساوی یا هم‌سنگ می‌گوییم. دو بردار مسـاوی مختصات‌های برابر دارند.

مثال

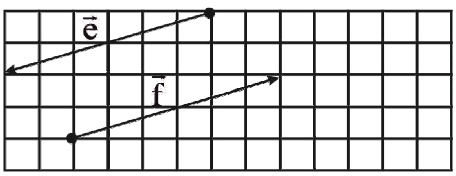
بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با هم برابرند و مختصات همگی آن‌ها $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است.



دو بردار قرینه: دو بردار موازی (هم راستا)، هم اندازه که در خلاف جهت یکدیگر باشند را قرینه گوییم. مختصـات دو بـردار قرینـه، قرینه یکدیگر است. بردار قرینه $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نمایش می‌دهیم.

مثال

بردارهای $\vec{e}$ و $\vec{f}$ قرینه یکدیگرند، مختصات بردار $\vec{f}$، $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و مختصات بردار $\vec{e}$ ، $\begin{bmatrix} -۶ \\ -۲ \end{bmatrix}$ است.



به‌دست آوردن حاصل جمع هندسی دو بردار:

برای به‌دست آوردن حاصل جمع دو بردار به روش هندسی می‌توان به یکی از دو صورت زیر عمل کرد.

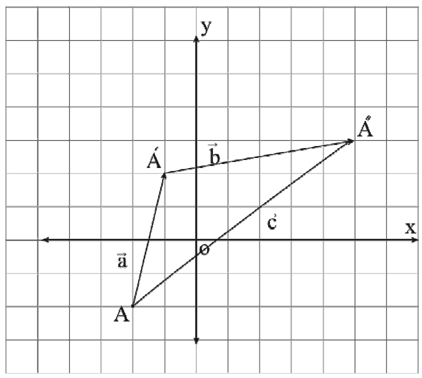
الف) روش مثلثی: در این روش کافی است برداری مساوی با یکی از بردارها را از انتهای بردار دیگر رسم کنیم، برداری کـه ابتـدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند، حاصل جمع این دو بردار است.

مثال

اگر شما از تهران به ساری و از ساری به مشهد پرواز کنید مانند این است که به طور مستقیم از تهران به مشهد پرواز کرده‌اید. (یا نقل مکان کرده‌اید) یعنی:

(مشهد ← تهران) = (مشهد ← ساری) + (ساری ← تهران)

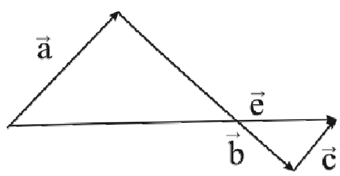
حال با توجه به شکل زیر می‌بینید که اگر نقطه‌ی A را ابتدا با بردار $\vec{a}$ سپس با بردار $\vec{b}$ انتقال دهیم. مانند این است که نقطه‌ی A را با بردار $\vec{c}$ انتقال داده باشیم. پس هرگاه بردارها به دنبال یکدیگر رسم شدند، به شکلی که انتهای یکی در ابتدای دیگری باشد، می‌توان از ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار وصل نموده و بردار حاصل جمع را مشخص نمود.



$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{AA''}\Rightarrow \begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\xrightarrow{\vec{a}}A' \\ \begin{bmatrix}-۲\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix} \\ A'\xrightarrow{\vec{b}}A'' \\ \begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A\xrightarrow{\vec{c}}A'' \\ \begin{bmatrix}-۲\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}\end{array}$$

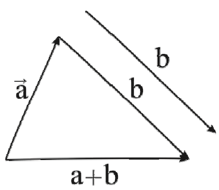
مثال



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{e}$$

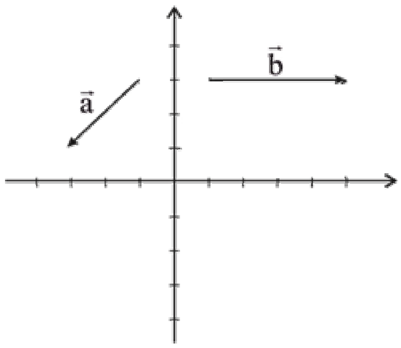
نکته

اگر دو بردار جدا از هم باشند. در این حالت کافی است، از انتهای یکی از آن‌ها برداری مساوی و موازی دیگری رسم کنیم و به همان روشی که گفته شد، بردار حاصل جمع را رسم کنیم.

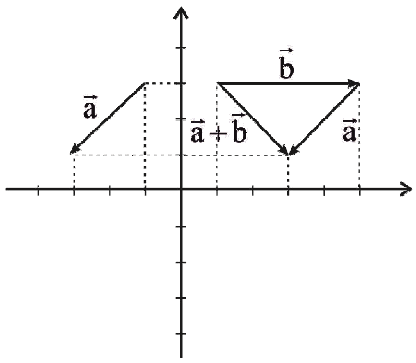


مثال

حاصل جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنید سپس جمع متناظر آن‌ها را بنویسید.



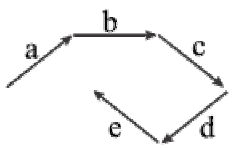
پاسخ

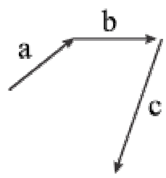


$$\vec{b}+\vec{a}=\begin{bmatrix}۴\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ -۲\end{bmatrix}$$

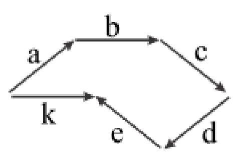
مثال

در هر یک از شکل‌های زیر بردار حاصل جمع را رسم کنید و جمع متناظر آن‌ها را بنویسید.

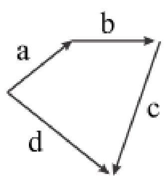




پاسخ



$\vec{k}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$



$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

تفریق بردارها:

می‌دانید که برای یافتن حاصل تفریق دو عدد صحیح، تفریق را به جمع تبدیل کرده و عدد دوم را قرینه می‌کنیم.

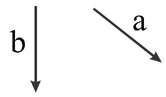
$$a-b=a+(-b)$$

برای یافتن حاصل تفریق دو بردار نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

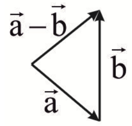
مثال

با توجه به بردارهای داده شده $\vec{a}-\vec{b}$ را رسم کنید.



پاسخ

داریم $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ بنابراین:



مثال

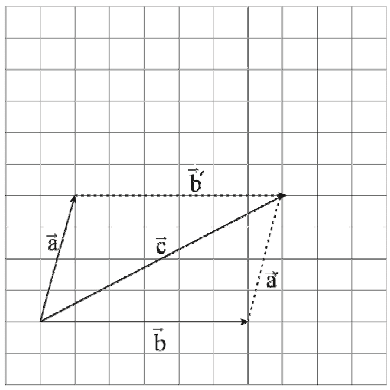
سه نقطه $A=\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ را به دست آورید.

پاسخ

می‌دانیم $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۷\end{bmatrix}$$

ب) **روش متوازی‌الاضلاع:** در این روش کافی است برداری مساوی با بردار دوم را از ابتدای بردار اول رسم کنیم. سپس با این دو بردار یک متوازی‌الاضلاع رسم کنیم، قطر این متوازی‌الاضلاع که از سر مشترک دو بردار می‌گذرد، حاصل جمع دو بردار است.

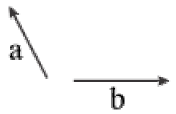


$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}'=\vec{c}\\ \vec{b}=\vec{b}'\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

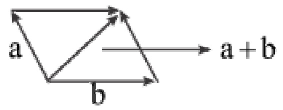
همان طور که ملاحظه نمودید در روش متوازی الاضلاع ابتدا با توجه به بردارهای مساوی، مجموع را به صورت روش مثلث در آورده و سپس حاصل جمع را به دست آوردیم.

مثال

حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



پاسخ

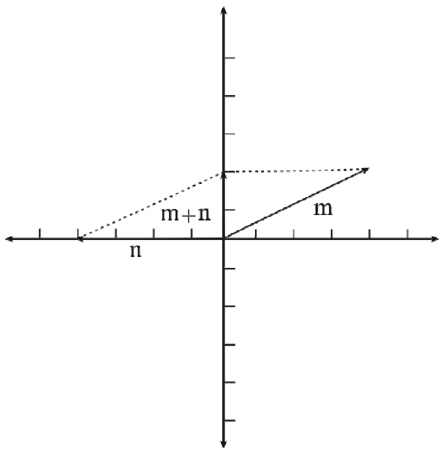


مثال

بردارهای $\vec{m}=\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}, \vec{n}=\begin{bmatrix}-۴\\۰\end{bmatrix}$ را از مبدأ مختصات رسم کنید و بردار حاصل جمع آن دو بردار را رسم کرده و سپس مختصات آن را نیز به دست آورید.

پاسخ

$$m+n=\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$$

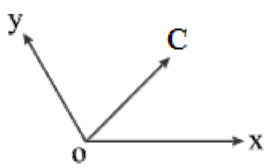


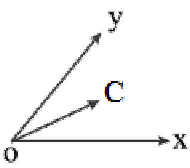
نکته

اگر طول یک بردار صفر باشد، این بردار موازی محور y ها است و اگر عرض آن برابر با صفر باشد، بردار موازی محور x ها است.

مثال

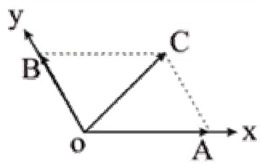
در هر یک از شکل‌ها، بردار $\overrightarrow{OC}$ را تجزیه کنید و به صورت حاصل جمع دو بردار بنویسید.



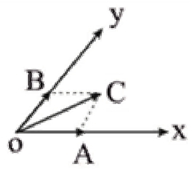


پاسخ

برای این کار از نقطه C به موازات oy و ox خطوطی را رسم می‌کنیم تا این نیم‌خط‌ها را قطع کند.



$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$



$\overline{OB}+\overline{OA}=\overline{OC}$

نکته

جمع دو بردار خاصیت جابجایی و خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

مثال

سه بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix}, \vec{c}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix}$ داده شده است، درستی رابطه‌ی زیر را بررسی نمایید.

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

پاسخ

$$\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+(\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۳\end{bmatrix}$$

$$(\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix})+\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۳\end{bmatrix}$$

نکته

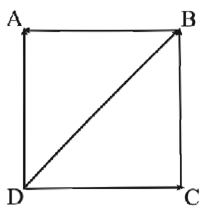
برای یافتن حاصل چند بردار کافی است طول بردارها را با هم و عرض آن‌ها را نیز با هم جمع کنیم تا به ترتیب، طول و عرض حاصل جمع به دست آید.

مثال

$$\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱+۳+(-۲)\\ ۲+(-۵)+۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۳\end{bmatrix}$$

مثال

شکل زیر یک مربع می‌باشد. کدام تساوی نادرست است؟



۱) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

۲) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{DC}$

۳) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=DB$

۴) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$

۵) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$

پاسخ

گزینه «۵» صحیح است.

دو بردار $\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}$ غیر هم جهت هستند، پس نمی‌توانند با هم مساوی باشند. بقیه گزینه‌ها درست است.

درس دوم: ضرب عدد در بردار

برای ضرب یک عدد در یک بردار می‌بایست آن عدد را هم در طول و هم در عرض بردار ضرب نمود. در حالت کلی اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ باشد k برابر بردار $\vec{a}$ یعنی $(\overrightarrow{ka})$ را به صورت $\overrightarrow{ka}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم.

با ضرب عدد k در بردار $\vec{a}$، طول و عرض بردار $\vec{a}$، k برابر می‌شود، اگر k عددی مثبت باشد، $\overrightarrow{ka}$، برداری k برابر بردار $\vec{a}$ و در جهت آن است و اگر k عددی منفی باشد، $\overrightarrow{ka}$، برداری k برابر بردار $\vec{a}$ و در خلاف جهت آن است.

مثال

$$-۲\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۱۴\end{bmatrix}$$

نکته

ضرب یک عدد در یک بردار راستای آن را تغییر نمی‌دهد.

مثال

بردارهای $-۳\vec{a},۲\vec{a},\vec{a}$ همه با هم موازی‌اند.

نکته

با ضرب یک عدد منفی در یک بردار، جهت بردار عوض می‌شود.

مثال

جهت بردار $\overrightarrow{-۳b}$ عکس جهت بردار $\vec{b}$ است.

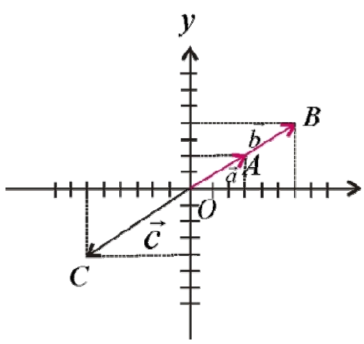
مثال

اگر $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردارهای $\vec{c}=-۲\vec{a},\vec{b}=۲\vec{a}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\vec{b}=۲\vec{a}=۲\times\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۴\end{bmatrix}=\overrightarrow{OB}$$

$$\vec{c}=-۲a=-۲\times\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\-۴\end{bmatrix}=\overrightarrow{OC}$$



از نظر اندازه بردارهای $\vec{c},\vec{b}$ هم اندازه هستند و دو برابر بردار $\vec{a}$ می‌باشند ولی همان طور که ملاحظه می‌کنید جهت آن‌ها قرینه یکدیگر است و این به خاطر عددی است که در $\vec{a}$ ضرب شده، در اولی ۲+ و در دومی ۲− می‌باشد.

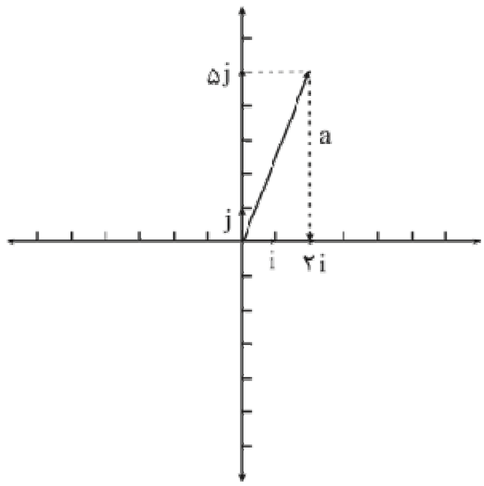
درس سوم: بردارهای واحد مختصات

بردار $\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}, \vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ را بردارهای واحد محور مختصات می‌گویند. بردار $\vec{i}$ بردار واحد محور طول‌ها و بردار $\vec{j}$ بردار واحد محور عرض‌ها می‌باشد.

مثال

اگر ۲ برابر $\vec{i}$ و ۵ برابر $\vec{j}$ را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$۲\vec{i}+۵\vec{j}=۲\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۵\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}=\vec{a}$$



نکته

هر بردار را می‌توان به صورت یک عبارت جبری بر حسب $\vec{i}, \vec{j}$ نوشت.

نکته

همیشه ضریب $\vec{i}$ را به عنوان طول بردار و ضریب $\vec{j}$ را به عنوان عرض بردار در نظر می‌گیریم.

مثال

بردارهای $\vec{m}=۵\vec{i}-۲\vec{j}\ ,\ \vec{n}=-۳\vec{i}+۴\vec{j}$ را به صورت مختصاتی بنویسید.

پاسخ

$$\vec{m}=۵\vec{i}-۲\vec{j}=۵\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\-۲\end{bmatrix}$$

$$\vec{n}=-۳\vec{i}+۴\vec{j}=-۳\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۴\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۴\end{bmatrix}$$

معادله‌های مختصاتی: معادله‌های مختصاتی مانند معادله‌های معمولی هستند با این تفاوت که پاسخ آن‌ها به جای یک مقدار عددی، یک مختصات است.

مثال

الف) $3x = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix}$

ب) $x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 2x = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

پاسخ

الف) $3x = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \div 3 \\ -9 \div 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

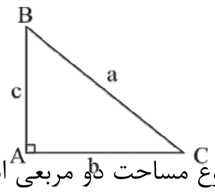
ب) $x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ -4-3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 2x = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

فصل ششم: مثلث

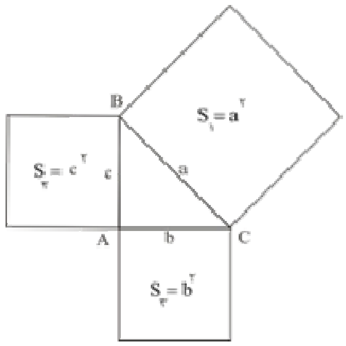
درس اول: رابطه فیثاغورس

در شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید، به ضلع مقابل به زاویه قائمه A وتر و به دو ضلع دیگر اضلاع مجاور زاویه قائمه می‌گوییم. معمولا ضلع مقابل به زاویه را با حرف کوچک نام همان زاویه نشان می‌دهند.



رابطه فیثاغورس: مساحت مربعی که با وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود برابر با مجموع مساحت دو مربعی است که با اضلاع زاویه قائمه ساخته می‌شوند.

به عبارت دیگر: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجذور دو ضلع زاویه قائمه. به این رابطه، رابطه فیثاغورس می‌گوییم.



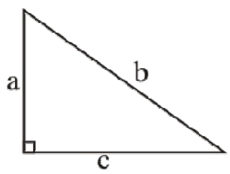
$$S_1 = S_2 + S_3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

نکته

در یک مثلث قائم‌الزاویه، وتر همیشه بزرگ‌تر از اضلاع زاویه قائمه است.

$$b > a \quad , \quad b > c$$



مثال

آیا با اعداد ۱۲ و ۶ و ۵ می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه ساخت؟

پاسخ

این اعداد را باید در رابطه فیثاغورس قرار دهیم اگر تساوی برقرار بود با این اعداد می‌توانیم یک مثلث قائم‌الزاویه بسازیم.

$$۶^2 + ۵^2 = ۳۶ + ۲۵ = ۶۱$$

$$۱۲^2 = ۱۴۴$$

پس $۱۲^2 \neq ۶^2 + ۵^2$ بنابراین با این اعداد نمی‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه ساخت.

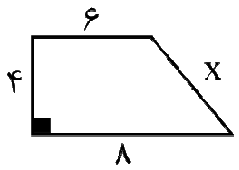
نکته

اگر در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه وتر و یک ضلع زاویه قائمه داده شده باشند و اندازه ضلع دیگر زاویه قائمه خواسته شود، می‌توان از رابطه زیر اندازه ضلع دیگر را محاسبه نمود.

(ضلع داده شده)^{۲} − (وتر)^{۲} = (ضلع خواسته شده)^{۲}

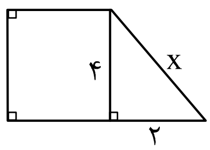
مثال

در شکل زیر مقدار x را به دست آورید.



پاسخ

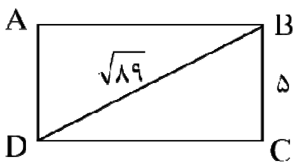
به کمک رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^{۲} = ۴^{۲} + ۲^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۱۶ + ۴ = ۲۰$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{۲۰}$$

مثال

در مستطیل مقابل اندازه ضلع DC را بیابید.



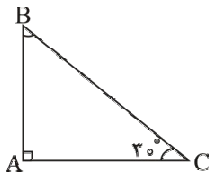
پاسخ

به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$DB^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲}$$
$$۸۹ = ۲۵ + CD^{۲} \Rightarrow CD^{۲} = ۸۹ - ۲۵ = ۶۴$$
$$\Rightarrow CD = ۸$$

نکته

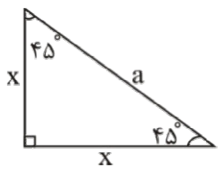
در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30°، برابر با نصف وتر است.



$$AB=\frac{1}{2}BC$$

نکته

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 45° برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

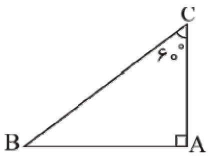


$$a^2=x^2+x^2=2x^2$$

$$a=\sqrt{2}x \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

نکته

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 60° برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



$$AB=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

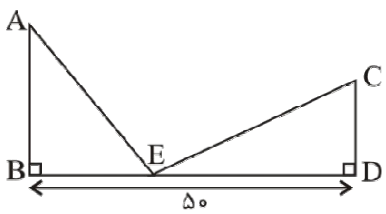
مثال

دو برج یکی به ارتفاع ۳۰ متر و دیگری به ارتفاع ۴۰ متر در مقابل هم به فاصله ۵۰ متری از هم قرار گرفته‌اند و بین آن‌ها فواره‌ای وجود دارد که اگر دو پرنده در یک زمان با یک سرعت، یکی از روی برج اول و دیگری از روی برج دوم به طرف آن پرواز کنند، در یک زمان به فواره می‌رسند. فاصله افقی فواره از هر برج چقدر است؟

پاسخ

مسأله با رسم شکل و استفاده از رابطه فیثاغورس به آسانی قابل حل است.

با توجه به این‌که فواره برج بلندتر نزدیک‌تر است، BE را مساوی x و DE را مساوی $50-x$ در نظر می‌گیریم.



از طرفی $AE = CE$. در مثلث ABE و CDE به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AE^۲ = AB^۲ + BE^۲ \Rightarrow AE^۲ = ۴۰^۲ + x^۲ = ۱۶۰۰ + x^۲$$
$$CE^۲ = ۳۰^۲ + (۵۰ - x)^۲ \Rightarrow CE^۲ = ۹۰۰ + ۲۵۰۰ - ۱۰۰x + x^۲$$
$$\Rightarrow AE^۲ = CE^۲ \Rightarrow ۱۶۰۰ + x^۲ = ۹۰۰ + ۲۵۰۰ - ۱۰۰x + x^۲$$

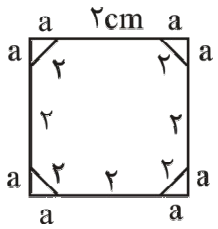
$$x^۲ + ۱۰۰x - x^۲ = ۹۰۰ + ۲۵۰۰ - ۱۶۰۰ \Rightarrow ۱۰۰x = ۱۸۰۰$$

$x = \frac{۱۸۰۰}{۱۰۰} = ۱۸m$ فاصله فواره از برج بلندتر

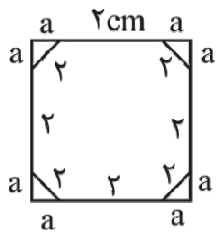
$DE = ۵۰ - x = ۵۰ - ۱۸ = ۳۲m$ فاصله فواره از برج کوتاه‌تر

مثال

در شکل مقابل یک ۸ ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است. اگر طول ضلع ۸ ضلعی ۲ سانتی‌متر باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



پاسخ



$$۲a^۲ = ۲^۲$$
$$۲a^۲ = ۴ \Rightarrow a^۲ = ۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$
طول ضلع مربع $= \sqrt{۲} + ۲ + \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} + ۲$

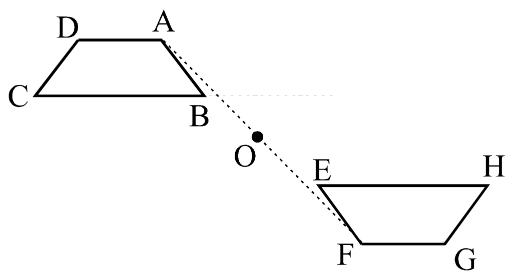
درس دوم: شکل‌های همنهشت

دو شکل را همنهشت گوییم، هرگاه بتوانیم یکی از آن‌ها را با چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) بر دیگری منطبق کنیم.

مثال

شکل $ABCD$ با شکل $EFGH$ همنهشت است. (با دوران ۱۸۰ درجه حول نقطه O)

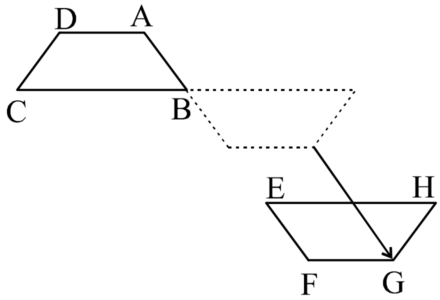
$AB = FE$
$BC = EH$
$CD = HG$
$AD = FG$
$\hat{A} = \hat{F}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{H}$, $\hat{D} = \hat{G}$



برای هر دو شکل می‌توان تبدیلات مختلفی پیدا کرد.

مثال

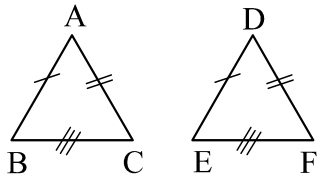
در مثال بالا می‌توانستیم ابتدا شکل را حول نقطه B ، 180° دوران داده و با یک انتقال به EFGH برسیم.



درس سوم: مثلث‌های هم‌نهشت

برای هم‌نهشتی مثلث‌ها سه حالت زیر را داریم:

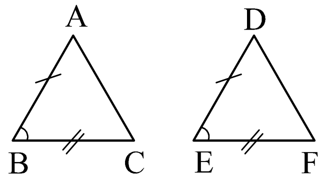
۱. برابری سه ضلع (ض ض ض)



$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$ (ض ض ض)

اجزای متناظر $\hat{A} = \hat{D} \;,\; \hat{B} = \hat{E} \;,\; \hat{C} = \hat{F}$

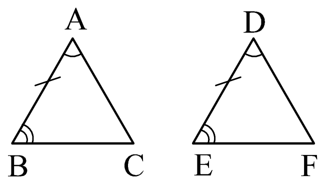
۲. برابری دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ \hat{B} = \hat{E} \\ BC = EF \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$ (ض ز ض)

اجزای متناظر $AC = DF \;,\; \hat{A} = \hat{D} \;,\; \hat{C} = \hat{F}$

۳. برابری دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

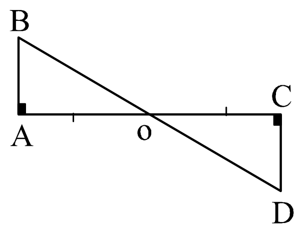


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = DE \\ \hat{B} = \hat{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$ (ز ض ز)

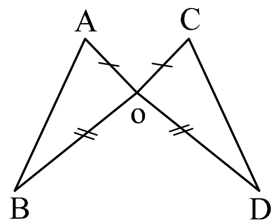
اجزای متناظر $AC = DF \;,\; BC = EF \;,\; \hat{C} = \hat{F}$

مثال

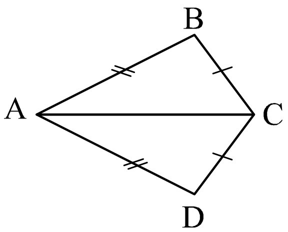
در هر یک از شکل‌های زیر دلیل هم‌نهشتی مثلث‌ها را بنویسید. سپس اجزای متناظر را مشخص کنید.



(ج)



(ب)



(الف)

پاسخ

الف)

$$\left.\begin{array}{r}AB=AD\\BC=DC\\AC=AC\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\cong A\overset{\triangle}{D}C$$ (ض ض ض)

اجزای متناظر $B\hat{A}C=D\hat{A}C\ ,\ \hat{B}=\hat{D}\ ,\ B\hat{C}A=D\hat{C}A$

ب)

$$\left.\begin{array}{r}AO=CO\\ (\text{متقابل به رأس})\ A\hat{O}B=C\hat{O}D\\BO=DO\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{O}B\cong C\overset{\triangle}{O}D$$ (ض ز ض)

اجزای متناظر $\hat{A}=\hat{C}\ ,\ \hat{B}=\hat{D}\ ,\ AB=CD$

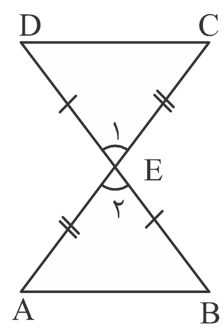
ج)

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{C}=90^\circ\\AO=CO\\ (\text{متقابل به رأس})\ A\hat{O}B=C\hat{O}D\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{O}B\cong C\overset{\triangle}{O}D$$ (ز ض ز)

اجزای متناظر $\hat{B}=\hat{D}\ ,\ BO=DO\ ,\ AB=CD$.

مثال

در شکل زیر E وسط AC و BD است. چرا $AB=CD$ ؟



پاسخ

بنابر شکل داریم:

$$\begin{cases}CE=AE\\ \hat{E}_1=\hat{E}_2 & \text{متقابل به رأس}\\ DE=BE\end{cases}\Rightarrow C\overset{\triangle}{D}E\overset{(\text{ض ز ض})}{\cong}A\overset{\triangle}{B}E\xrightarrow{\text{اجزای}}AB=CD$$

درس چهارم: هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

علاوه بر حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها که در بخش قبل گفته شد، برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه دو حالت زیر را هم داریم:

۱. برابری وتر و یک ضلع (و ض)

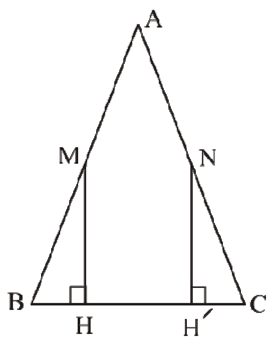
۲. برابری وتر و یک زاویه تند (و ز)

در حالت اول، اگر اندازه وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه را داشته باشیم با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توانیم ضلع سوم را هم به دست آوریم و در این صورت دو مثلث به حالت (ض ض ض) با هم هم‌نهشت می‌شوند.

در حالت دوم، وقتی اندازه یک زاویه به جز زاویه قائمه را داشته باشیم، با توجه به این‌که مجموعه زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، می‌توان اندازه زاویه سوم را هم به دست آوریم و در این صورت دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت می‌شوند.

مثال

مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N به ترتیب وسط AB و AC قرار دارند. دلیل تساوی دو مثلث BHM و $CH'N$ را بنویسید.



پاسخ

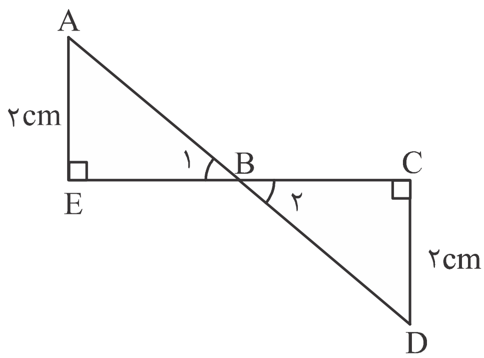
مثلث ABC متساوی الساقین است، پس اضلاع AB و AC با یکدیگر برابرند. در نتیجه داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}AC \Rightarrow MB = NC$$

زاویه‌های B و C نیز با یکدیگر برابرند. وتر NC و زاویه C از مثلث قائم‌الزاویه $CH'N$ با وتر BM و زاویه B از مثلث قائم‌الزاویه BHM برابرند، در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه تند برابرند.

مثال

در شکل زیر پاره‌خط های AD و EC یکدیگر را نصف کرده‌اند. (منصف یکدیگراند). حالت‌های همنهشتی دو مثلث را بنویسید.



پاسخ

حالت اول (ض‌ض‌ض)

$$\left.\begin{array}{l} AB = BD \\ BE = BC \\ AE = CD = ۲cm \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E \cong B\overset{\Delta}{C}D$$ (ض‌ض ض)

حالت دوم (ض زض)

$$\left.\begin{array}{l} AB = BD \\ BE = BC \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \text{ متقابل به رأس} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E \cong B\overset{\Delta}{C}D$$ (ض ز ض)

حالت سوم (ز ض ز)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{C} = \hat{E} = ۹۰^\circ \\ BE = BC \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E \cong B\overset{\Delta}{C}D$$ (ز ض ز)

حالت چهارم (و ض)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ \\ AB = BD \text{ (وتر)} \\ BE = BC \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E \cong B\overset{\Delta}{C}D$$ (و ض)

حالت پنجم (و ز)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \text{ متقابل به رأس} \\ AB = BD \text{ (وتر)} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E \cong B\overset{\Delta}{C}D$$ (و ز)

فصل هفتم: توان و جذر

مفهوم توان

اگر یک عدد چند بار در خودش ضرب شود، می‌توان آن را به صورت عدد توان‌دار نوشت و از تکرار ضرب جلوگیری کرد.

در واقع برای خلاصه‌نویسی ضرب‌های تکراری از توان استفاده می‌کنیم.

$$\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m}=a^{m}\qquad (m\in\mathbb{N})$$

در این عدد a پایه و m توان است.

مثال

$$۲^{۳}=۲\times۲\times۲$$
$$۳\times۳\times۳\times۳=۳^{۴}$$
$$(-۳)^{۴}=(-۳)\times(-۳)\times(-۳)\times(-۳)$$
$$۵^{۴}=۵\times۵\times۵\times۵$$
$$(-\frac{۲}{۵})^{۱۰}=\underbrace{(-\frac{۲}{۵})\times\cdots\times(-\frac{۲}{۵})}_{۱۰\ \text{بار}}$$
$$۳^{۵^{۲}}=۳^{۵\times۵}=۳^{۲۵}=\underbrace{۳\times۳\times۳\times\ldots\times۳}_{۲۵\ \text{بار}}$$

نکته

در ضرب اعداد توان‌دار، هرگاه پایه‌ها برابر و توان‌ها متفاوت باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته، توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^{n}\times a^{m}=a^{n+m}$$

(a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی)

مثال

$$۵^{۳}\times۵\times۵^{۷}=۵^{۳+۱+۷}=۵^{۱۱}$$
$$(۰/۲)^{\frac{۳}{۲}}\times\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}=(۰/۲)^{\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}=(۰/۲)^{\frac{۴}{۲}}=(۰/۲)^{۲}$$
$$۴^{۵}\times۴^{۸}=۴^{۵+۸}=۴^{۱۳}$$
$$(-۳)^{۴}\times(-۳)^{۱۱}=(-۳)^{۴+۱۱}=(-۳)^{۱۵}$$

نکته

در ضرب اعداد توان‌دار، هرگاه توان‌ها برابر و پایه‌ها متفاوت باشد، پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و یکی از توان ها را می نویسیم.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

(b,a دو عدد دلخواه و n عدد طبیعی)

مثال

$$۳^۶ \times ۷^۶ = (۳ \times ۷)^۶ = ۲۱^۶$$
$$(۱/۲)^{۱۴} \times ۵^{۱۴} = (۱/۲ \times ۵)^{۱۴} = ۶^{۱۴}$$
$$۳^۴ \times ۵^۴ = (۳ \times ۵)^۴ = ۲۰^۴$$
$$(-۷)^۳ \times ۲^۳ = (-۷ \times ۲)^۳ = (-۱۴)^۳$$

نکته

در ضرب اعداد توان‌دار، هرگاه هم توان‌ها برابر باشند و هم پایه‌ها، به یکی از دو صورت بالا حل می‌کنیم.

مثال

$$۷^۵ \times ۷^۵ = ۷^{۵+۵} = ۷^{۱۰}$$
$$۷^۵ \times ۷^۵ = (۷ \times ۷)^۵ = (۷^۲)^۵ = ۷^{۵\times۲} = ۷^{۱۰}$$

نکته

هرگاه یک عدد توان دار بخواهد باز هم به توان برسد،کافی است آن عدد را نوشته و توان هایش را در هم ضرب کنیم و به عنوان توان حاصل بنویسیم.

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

(a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی)

مثال

$$(۳^۲)^۴ = ۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳^۲ = ۳^{۲+۲+۲+۲} = ۳^{۲\times۴} = ۳^۸$$
$$((-۵)^۶)^۳ = (-۵)^۶ \times (-۵)^۶ \times (-۵)^۶ = (-۵)^{۶+۶+۶} = (-۵)^{۶\times۳} = (-۵)^{۱۸}$$
$$(۳^۴)^۵ = ۳^{۴\times۵} = ۳^{۲۰}$$
$$(۳^۲)^{۲^۳} = (۳^۲)^۸ = ۳^{۱۶}$$

نکته

توجه کنید که دو عدد $a^{n^m}, (a^n)^m$ لزوماً برابر نیستند.

مثال

$$(2^3)^2 = 2^6 \quad , \quad 2^{3^2} = 2^9 \quad \Rightarrow \quad (2^3)^2 \neq 2^{3^2}$$

$$(7^3)^4 = 7^{3\times 4} = 7^{12} \quad , 7^{3^4} = 7^{(3^4)} = 7^{81} \Rightarrow \quad (7^3)^4 \neq 7^{3^4}$$

نکته

در صورت وجود عوامل جدا کننده در عبارت‌های توان‌دار، می‌توانیم جای توان‌ها را عوض کنیم.

اگر a عدد دلخواه و l، m و n سه عدد طبیعی باشند:

$$((a^l)^m)^n = ((a^l)^n)^m = ((a^m)^n)^l = ((a^m)^l)^n = ((a^n)^m)^l = ((a^n)^l)^m = a^{nlm}$$

نکته

در جمع و تفریق اعداد توان‌دار، ابتدا اعداد را به توان می‌رسانیم و بعد جمع و تفریق را انجام می‌دهیم.

مثال

$$(5^3 + 1^6) - 3^4 = (5\times 5\times 5 + 1) - (3\times 3\times 3\times 3) = (125 + 1) - 81 = 126 - 81 = 45$$

نکته

۱) هر عدد به جز صفر به توان صفر برسد حاصل یک می‌شود. یعنی:

$$a^0 = 1 \quad , \quad (a \neq 0)$$

۲) 0^0 تعریف نشده است.

۳) هرعدد به توان یک، برابر با خودآن عدد است.

$$a^1 = a$$

۴) عدد یک به هر توانی برسد حاصل یک می‌شود.

$$1^n = 1$$

مثال

$$[-(-\frac{8}{5})]^0 = 1$$

$$(1024)^1 = 1024$$

$$((((3^2)^5)^3)^0 = 1$$

$$(((3^2)^5)^{3^0} = 3^{10}$$

نکته

اگر n عددی زوج و $a \neq 0$ باشد، آن گاه $-a^n \neq (-a)^n$.

$$\begin{cases}(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16 \\ -2^4 = -(2)(2)(2)(2) = -16\end{cases} \Rightarrow (-2)^4 \neq -2^4$$

نکته

اگر عددی منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی است.

$(-a)^{2k} = a^{2k}$ $\qquad$ $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$

مثال

$(-3)^4 = 81$

$(-3)^3 = -27$

جمع اعداد توان دار با پایه های مساوی

در این حالت می‌توان از عددی که توان کوچک‌تری دارد فاکتور گرفت.

$$a^m + a^{m+1} = ... + a^{m+n} = a^m(1 + a^1 + a^2 + ... + a^n)$$

مثال

$$\frac{4^{25} + 4^{26} + 4^{27} + 4^{28}}{2^{48}} = \frac{4^{25}(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3)}{2^{48}} = \frac{(2^2)^{25}(1 + 4 + 16 + 64)}{2^{48}}$$

$$= \frac{2^{50} \times 85}{2^{48}} = 2^2 \times 85 = 340$$

تقسیم اعداد توان‌دار

نکته

در تقسیم اعداد توان‌دار، اگر پایه‌ها برابر و توان‌ها مختلف باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$a^n \div a^m = a^{n-m}$

($a \neq 0$ **عددی دلخواه و n و m اعداد طبیعی)**

مثال

$$۱۱^{۶} \div ۱۱^{۳} = ۱۱^{۶-۳} = ۱۱^{۳}$$

$$۸^{۹} \div ۲^{۴} = \left(۲^{۳}\right)^{۹} \div ۲^{۴} = ۲^{۲۷} \div ۲^{۴} = ۲^{۲۷-۴} = ۲^{۲۳}$$

$$۵^{۱۲} \div ۵^{۳} = ۵^{۱۲-۳} = ۵^{۹}$$

$$(-۴)^{۶} \div (-۴) = (-۴)^{۶-۱} = (-۴)^{۵}$$

$$\frac{۵^{۴}}{۵^{۷}} = \frac{۵^{۴}}{۵^{۴} \times ۵^{۳}} = \frac{۱}{۵^{۳}}$$

نکته

در تقسیم اعداد توان‌دار، اگر پایه‌ها متفاوت و توان‌ها برابر باشند، پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم و یکی از توان‌ها را می نویسیم.

$$a^{n} \div b^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}} = (\frac{a}{b})^{n}$$

(b,a دو عدد دلخواه و $b \neq ۰$ و n عدد طبیعی)

مثال

$$۴۲^{۳} \div ۷^{۳} = \left(\frac{۴۲}{۷}\right)^{۳} = ۶^{۳}$$

$$(۸/۱)^{۲} \div (۰/۳)^{۲} = \left(\frac{۸/۱}{۰/۳}\right)^{۲} = ۲۷^{۲}$$

$$۱۲^{۷} \div ۶^{۷} = (\frac{۱۲}{۶})^{۷} = ۲^{۷}$$

$$۴^{۹} \div (-۳)^{۹} = (-\frac{۴}{۳})^{۹}$$

نکته

$$\begin{cases} a^{n} \div a^{n} = (\frac{a}{a})^{n} = ۱^{n} = ۱ \\ a^{n} \div a^{n} = a^{n-n} = a^{۰} \end{cases} \Rightarrow \quad a^{۰} = ۱ \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq ۰)$$

نکته

در ضرب و تقسیم اعداد تواندار اگر نه پایه و نه توان هیچ کدام مساوی نباشند $(a \neq b, m \neq n)$، قاعده‌ای برای ضرب یا تقسیم وجود ندارد و ساده نمی‌شوند و اگر b,a پس از تجزیه، عامل‌های مشترک داشته باشند، طبق قوانین توان ساده می شوند.

نکته

برای محاسبه عبارت‌های شامل اعداد توان‌دار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. از درونی‌ترین پرانتز شروع می‌کنیم.

۲. مقدار اعداد توان‌دار را محاسبه می‌کنیم.

۳. ضرب و تقسیم بین اعداد را به ترتیب از چپ به راست انجام می‌دهیم.

۴. جمع و تفریق را به ترتیب از چپ به راست انجام می‌دهیم.

مثال

$$((۵^۲+۲^۳)\div۳)-۳^۲=((۲۵+۸)\div۳)-۹=(۳۳\div۳)-۹=۱۱-۹=۲$$

$$\frac{۳^۲\times۲-۵}{۴^۲-۲^۳\times۳}=\frac{۹\times۲-۵}{۱۶-۸\times۳}=\frac{۱۸-۵}{۱۶-۲۴}=\frac{۱۳}{-۸}=-\frac{۱۳}{۸}$$

نکته

مقایسه توان‌ها: فرض کنیم a عددی مثبت و $m>n$.

اگر $a>۱$، آن‌گاه $a^m>a^n$

اگر $a=۱$ آن‌گاه $a^m=a^n$

اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه $a^m<a^n$

مثال

$$a=۲\Rightarrow ۲^۳>۲^۲$$

$$a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۸}<(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

تساوی توان‌ها

در تساوی دو عدد توان‌دار، درصورتی که پایه‌ها مساوی باشند، توان‌ها نیز مساوی‌اند.

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n$$

معادله توانی

معادله‌ای که در آن مجهول در توان قرار می‌گیرد.

برای حل چنین معادله‌ای در صورت امکان دو طرف معادله را به دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی تبدیل کرده، سپس توان‌ها را مساوی قرار داده و معادله را حل می کنیم.

مثال

$$۶^x = ۳۶ \Rightarrow ۶^x = ۶^۲ \Rightarrow x = ۲$$

$$۲^{x+۱} = ۳۲ \Rightarrow ۲^{x+۱} = ۲^۵ \Rightarrow x+۱ = ۵ \Rightarrow x = ۴$$

$$۶۲۵^{x+۳} = ۵^{۲x-۶} \Rightarrow (۵^۴)^{x+۳} = ۵^{۲x-۶} \Rightarrow ۵^{۴x+۱۲} = ۵^{۲x-۶}$$

$$\Rightarrow ۴x+۱۲ = ۲x-۶ \Rightarrow ۲x = -۶-۱۲ \Rightarrow ۲x = -۱۸ \Rightarrow x = -۹$$

جذر تقریبی

اگر a و b $(b \geq ۰)$ دو عدد صحیح باشند و $a^۲ = b$، آن‌گاه b را مجذور یا توان دوم a و a را جذر یا ریشه دوم b می‌گویند و با $\sqrt{b}$ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال $۲۵ = ۵^۲$، پس ۲۵ مجذور ۵ و ۵ ریشه ۲۵ است. همچنین $۲۵ = (-۵)^۲$ پس ۵- هم ریشه ۲۵ است. برای نمایش ریشه‌های ۲۵ از دو نماد $\sqrt{۲۵}$ و $-\sqrt{۲۵}$ استفاده می‌کنیم به عبارت دیگر $\sqrt{۲۵} = ۵$ و $-\sqrt{۲۵} = -۵$.

بعضی اعداد مجذور کامل هستند. مانند:

$\sqrt{۳۶} = ۶$ $\qquad$ $\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$ $\qquad$ $\sqrt{۶۲۵} = ۲۵$

$\sqrt{۱۲/۲۵} = ۳/۵$ $\qquad$ $\sqrt{۶۴} = ۸$

ولی بعضی اعداد ریشه صحیح ندارند و باید مقدار تقریبی جذر آن‌ها را محاسبه کنیم. مانند:

$\sqrt{۲۱}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۳۱}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۷}$

مثال

جذر تقریبی $\sqrt{۴۰}$ را محاسبه کنید.

پاسخ

چون $۴۹ > ۴۰ > ۳۶$ پس $\sqrt{۴۹} > \sqrt{۴۰} > \sqrt{۳۶}$ و این یعنی $۷ > \sqrt{۴۰} > ۶$ است. حال فاصله ۶ تا ۷ روی محور را نصف کرده و مجذور ۶/۵ را حساب می‌کنیم، $(۶/۵)^۲ = ۴۲/۲۵$.

پس حتماً جذر ۴۰ بین ۶ تا ۶/۵ قرار دارد و چون به مجذور ۶/۵ نزدیک‌تر است چند عدد بین ۶ تا ۶/۵ که به ۶/۵ نزدیک‌تر هستند را بررسی می‌کنیم.

عدد	۶	۶/۳	۶/۴
مجذور	۳۶	۳۹/۶۹	۴۰/۹۶

بنابراین $\sqrt{۴۰} \simeq ۶/۳$.

۶/۳ جذر تقریبی ۴۰ تا یک رقم اعشار است. حالا می‌خواهیم دقت محاسبه را بالاتر ببریم و جذر تقریبی را تا دو رقم اعشار حساب کنیم. با توجه به جدول بالا $۶/۴ > \sqrt{۴۰} > ۶/۳$. پس باید اعداد بین ۶/۳ تا ۶/۴ را بررسی کنیم. ۶/۳۵ در وسط این فاصله قرار دارد و $(۶/۳۵)^۲ = ۴۰/۳۲۲۵$.

بنابراین $۶/۳۵ > \sqrt{۴۰} > ۶/۳$ و می‌توانیم جدول زیر را داشته باشیم:

عدد	۶/۳۰	۶/۳۲	۶/۳۳
مجذور	۳۹/۶۹	۳۹/۹۴۲۴	۴۰/۰۶۸۹

و چون $۴۰ - ۳۹/۹۴۲۴ = ۰/۰۵۷۶$ و $۴۰/۰۶۸۹ - ۴۰ = ۰/۰۶۸۹$ پس جذر تقریبی ۴۰ تا دو رقم اعشار برابر است با $۶/۳۲$.

با ادامه این روش می‌توانیم جذر تقریبی اعداد را تا هر رقم اعشار حساب کنیم.

مثال

مقدار تقریبی $\sqrt{۱۷}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$۱۶ < ۱۷ < ۲۵ \Rightarrow ۴ < \sqrt{۱۷} < ۵$$

$$(۴/۵)^۲ = ۲۰/۲۵$$

عدد	۴/۱	۴/۲
مجذور	۱۶/۸۱	۱۷/۶۴

$$\Rightarrow \sqrt{۱۷} \simeq ۴/۱$$

مثال

جذر تقریبی ۵ را تا دو رقم اعشار به‌دست آورید.

پاسخ

$۴ < ۵ < ۹$ بنابراین $۲ < \sqrt{۵} < ۳$ و

$$(۲/۵)^۲ = ۶/۲۵$$

عدد	۲/۱	۲/۲	۲/۳
مجذور	۴/۴۱	۴/۸۴	۵/۲۹

$$\Rightarrow ۲/۲ < \sqrt{۵} < ۲/۳$$

و $(۲/۲۵)^۲ = ۵/۰۶۲۵$

عدد	۲/۲۱	۲/۲۲	۲/۲۳	۲/۲۴
مجذور	۴/۸۸۴۱	۴/۹۲۸۴	۴/۹۷۲۹	۵/۰۱۷۶

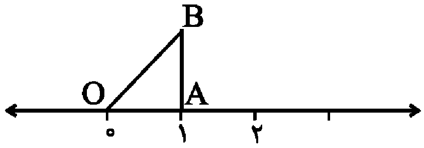
$$\Rightarrow \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۴$$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ را می‌توانیم با روش گفته شده و یا به کمک ماشین حساب محاسبه کنیم. حال می‌خواهیم $\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد نمایش دهیم.

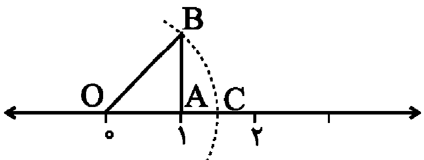
برای این کار مشابه شکل زیر روی محور مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی به طول ضلع ۱ رسم می‌کنیم. بنابر رابطه فیثاغورس داریم:

$$OB^{۲} = OA^{۲} + AB^{۲}$$
$$OB^{۲} = ۱ + ۱ = ۲$$
$$OB = \sqrt{۲}$$



حال دهانه پرگار را به اندازه OB باز کرده و کمانی می‌زنیم تا محور را در نقطه C قطع کند.

$$OC = OB = \sqrt{۲}$$



و اگر با استفاده از پرگار به اندازه‌ی طول وتر OB از سمت چپ کمان بزنیم می‌توانیم نقطه‌ی $-\sqrt{۲}$ را روی محور نشان دهیم.

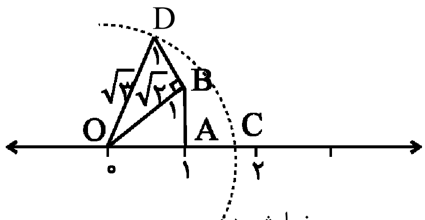
مثال

عدد $\sqrt{۳}$ را روی محور نمایش دهید.

پاسخ

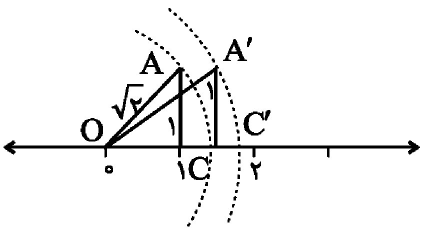
باید مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنیم که وتر آن $\sqrt{۳}$ باشد. طبق رابطه‌ی فیثاغورس اگر یکی از اضلاع قائمه $\sqrt{۲}$ و دیگری ۱ باشد، وتر مثلث $\sqrt{۳}$ است.

$$OD = OC = \sqrt{۳}$$



همچنین $\sqrt{۳}$ را می‌توانیم به روش زیر هم روی محور نمایش دهیم:

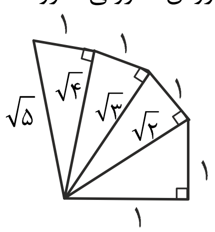
$$OC = \sqrt{۲}$$
$$CA' = ۱$$
$$OC' = OA'$$



از طرفی:

$$OA'^{۲} = OC^{۲} + CA'^{۲}$$
$$OA'^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲} + ۱^{۲} = ۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow OA' = \sqrt{۳} \Rightarrow OC' = \sqrt{۳}$$

به روش بالا اعداد دیگری مثل $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$ و ... را نیز می‌توان رسم کرد که این روش به روش حلزونی معروف است.



نکته

برای اعدادی مثل $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۷}$ و ... چون هر یک از این اعداد مجموع دو مجذور کامل هستند. نیازی به رسم اعداد رادیکالی کوچک‌تر از آن‌ها نمی‌باشد و هر یک از این اعداد را می‌توان تنها با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که وتر آن عدد مورد نظر ما و اضلاع قائمه‌ی آن همان دو عدد مجذور باشند، نشان داد.

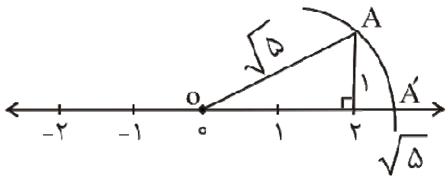
مثال

اعداد $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۷}$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ

$\sqrt{۵} = \sqrt{۴+۱}$

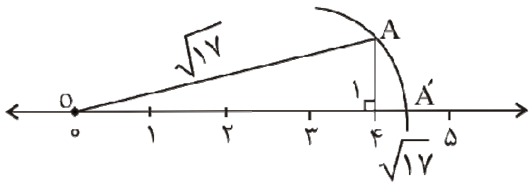
مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک ضلع آن ۲ واحد و ضلع دیگر ۱ واحد می‌باشد. وتر این مثلث برابر $\sqrt{۵}$ است.



در مورد $\sqrt{۱۷}$ نیز چون مجموع دو مجذور کامل است از روش بالا می‌توانیم استفاده کنیم.

$\sqrt{۱۷} = \sqrt{۱۶+۱}$

پس روی محور اعداد حقیقی مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک ضلع آن ۴ واحد و ضلع دیگر آن ۱ واحد باشد. وتر این مثلث برابر $\sqrt{۱۷}$ است.

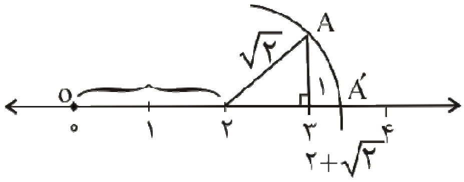


مثال

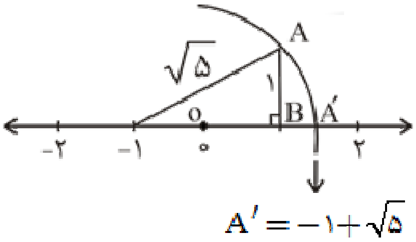
اعداد $\sqrt{۲}+۲$ و $\sqrt{۵}+۱-$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ

برای نمایش عدد $۲+\sqrt{۲}$ مقدار ۲ را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی ۲، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که وتر آن $\sqrt{۲}$ باشد.



برای نمایش عدد $-۱+\sqrt{۵}$، مبدأ را -۱ در نظر می‌گیریم و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که وتر آن $\sqrt{۵}$ باشد.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

اگر b,a اعداد مثبت باشند، در این صورت داریم:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

مثال

$$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$$

$$\frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۳۲}{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$$\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

مثال

اگر $A=۴۰$ و $B=\sqrt{۰/۱۶}$ باشد حاصل $\sqrt{A\times B}$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\sqrt{A\times B}=\sqrt{۴۰\times\sqrt{۰/۱۶}}=\sqrt{۴۰\times ۰/۴}=\sqrt{۱۶}=۴$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

در جمع و تفریق نمودن رادیکال‌ها ابتدا جمله‌های متشابه را در کنار همدیگر قرار می‌دهیم و سپس ضرایب آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

جمله‌های متشابه: به جمله‌هایی متشابه می‌گویند (جمله‌های رادیکالی) که اعداد زیر داخل رادیکال‌ها مساوی باشند. (پس از تجزیه و ساده شدن).

دقت کنید که برای جمع و تفریق رادیکال‌ها مانند عبارت جبری با آن‌ها رفتار می‌کنیم.

مثال

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\neq\sqrt{۲+۳}$$

$$\sqrt{۶}-\sqrt{۳}\neq\sqrt{۶-۳}$$

$$۴\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}=(۴+۳)\sqrt{۵}=۷\sqrt{۵}$$

$$۲\sqrt{۷}-۳\sqrt{۷}=(۲-۳)\sqrt{۷}=(-۱)\sqrt{۷}=-\sqrt{۷}$$

$$\underline{\sqrt{۲}}+\underline{\underline{۲\sqrt{۳}}}+\underline{۳\sqrt{۲}}-\underline{\underline{\sqrt{۳}}}=\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۴\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

نکته

جذر اعداد بین صفر و یک از خود عدد بزرگ‌تر است.

مثال

$$\sqrt{۰/۲۵}=\sqrt{۰/۰۱\times۲۵}=\sqrt{۰/۰۱}\times\sqrt{۲۵}=\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}\times۵=\frac{۱}{۱۰}\times۵=۰/۱\times۵=۰/۵$$

نکته

جذر اعداد منفی قابل محاسبه نیست که در اصطلاح به آن تعریف نشده می‌گویند.

مثال

$\sqrt{-۲}$ تعریف نشده

$\sqrt{-۱/۴۴}$ تعریف نشده

نکته

تعداد رقم‌های اعشاری مجذور دو برابر تعداد رقم‌های اعشاری جذر می‌باشد. به عبارت دیگر اگر از یک عدد اعشاری جذر بگیریم. تعداد رقم اعشاری جذر نصف تعداد رقم‌های اعشاری عدد اصلی خواهد بود.

مثال

$$(0/3)^2 = 0/09 \rightarrow \sqrt{0/09} = 0/3$$
$$(0/005)^2 = 0/000025 \rightarrow \sqrt{0/000025} = 0/005$$
$$(0/007)^2 = 0/000049 \rightarrow \sqrt{0/000049} = 0/007$$

ویژه دانش‌آموزان علاقه‌مند

توان منفی: اگر n یک عدد صحیح مثبت و $a \neq 0$ آن‌گاه داریم:

$$a^{-n} = (\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$$

مثال

$$0/1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$
$$0/00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$$
$$2^5 \div 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

تذکر: برای تبدیل هر عدد توان‌دار با پایه غیر صفر به توان مثبت، باید پایه را برعکس کرد.

مثال

$$5^{-5} = (\frac{1}{5})^5 = \frac{1}{5^5} \qquad , \qquad (\frac{2}{9})^{-4} = (\frac{9}{2})^4$$

رقم یکان اعداد توان‌دار

الف) اعدادی که رقم یکان آن ها یکی از اعداد ۶، ۵ ، ۱و ۰ باشد به هرتوانی برسند. رقم یکان آن‌ها تغییری نمی‌کند.

مثال

رقم یکان 236^{75} چند است؟

پاسخ

یکان عدد ۶ است.

ب) اعدادی که رقم یکان آن ها یکی از اعداد ۹ یا ۴ باشند اگر به توان فرد برسند همان رقم و اگر به تـوان زوج برســند رقـم یکان به ترتیب ۱ و ۶ خواهد بود

مثال

رقم یکان هریک از اعداد زیر را به دست آورید.

$۲۴۹^{۷۵},۲۷۹^{۴۸},۳۱۴^{۱۲},۵۶۴^{۲۹}$

پاسخ

$۲۴۹^{۷۵} \xrightarrow[\text{یکان}]{\text{رقم}} ۹$

$۲۷۹^{۴۸} \xrightarrow[\text{یکان}]{\text{رقم}} ۱$

$۳۱۴^{۱۲} \xrightarrow[\text{یکان}]{\text{رقم}} ۶$

$۵۶۴^{۲۹} \xrightarrow[\text{یکان}]{\text{رقم}} ۴$

ج) در صورتی که مرتبه‌ی یکان پایه‌ی اعداد توان‌دار به یکی از ارقام ۸ و ۷ و ۳ و ۲ ختم شود، توانش را بر ۴ تقسیم کرده، باقیمانده را توان رقم یکان عدد قرار داده رقم یکان را مشخص کنید.

مثال

رقم یکان عدد $۳۹۷^{۴۶}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\begin{array}{r|l} ۴۶ & ۴ \\ -۴ & ۱۱ \\ \hline ۶ & \\ -۴ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۷^{۲} = ۴۹ \xRightarrow[\text{عدد}]{\text{رقم یکان}} = ۹$$

ساده کردن رادیکال‌ها با استفاده از تجزیه

با تجزیه عبارت‌های زیر رادیکال، می‌توان آن‌ها را ساده کرد.

مثال

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$\sqrt{۵۰}$

$-۳\sqrt{۳۶}$

پاسخ

$$\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲\times۲۵}=\sqrt{۲\times۵^۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$-۳\sqrt{۳۶}=-۳\sqrt{۲^۲\times۳^۲}=-۳\times۲\times۳=-۱۸$$

تمرین

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-۱)^۱-(-۱)^۲-(-۱)^۳-...-(-۱)^{۱۳۹۴}=$

ب) $\frac{۱+۲+...+۲۵}{۲۵}=$

ج) $-۱\frac{۲}{۵}\times(-۳\frac{۵}{۸})$

د) $-\frac{۴}{۳}-(+\frac{۵}{۱۲})$

۲. حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۲}{۳}}}$$

۳. دمای شهر A به اندازه ۵ درجه از میانگین دمای دو شهر B, A سردتر است. اگر دمای شهر A ، (-۸) درجه باشد، دمای شهر B چقدر است؟

۴. هر یک از عددهای زیر چند شمارنده دارند؟

۲۱۸ ,۱۹۲, ۳۰۷ , ۷۲ , ۳۰۱

۵. از روش غربال اراتستن برای تعیین عددهای اول از ۱۰۰ تا ۱۲۰ استفاده می کنیم، عددی که دیرتر خط می‌خورد را بیابید.

۶. تعیین کنید کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) ۵ و ۳ تنها شمارنده‌های اول یک عدد هستند. این عدد حداقل ۴ شمارنده دارد.

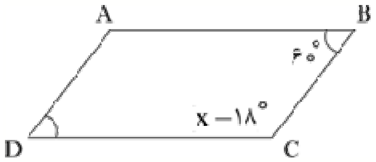
ب) کوچک‌ترین عدد با ۳ شمارنده اول متفاوت ۱۰۵ است.

ج) تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰، ۵ تاست.

د) تعداد شمارنده‌های یک عدد همواره عددی فرد است.

هـ) عدد ۴۷ یک شمارنده اول دارد.

۷. با توجه به شکل زیر که در آن چهار ضلعی **ABCD** متوازی‌الاضلاع است، مقدار **x** را بیابید.



۸. تعیین کنید کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر قطرهای یک لوزی با هم برابر باشند، آن شکل حتماً مربع است.

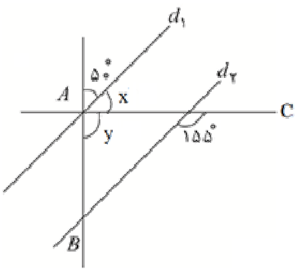
ب) متوازی‌الاضلاعی که حداقل یک زاویه قائمه داشته باشد، حتماً مربع است.

ج) اگر اضلاع دو زاویه با هم موازی باشند، این دو زاویه مساوی‌اند.

د) از اتصال متوالی وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع به هم، متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.

هـ) در متوازی‌الاضلاع، قطرها نیمساز نظیر زاویه‌ها هستند.

۹. در شکل زیر $d_۱ || d_۲$، مقدار **x** و **y** را بیابید.



۱۰. اندازه زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم $۱۵۰°$ است. تعداد اضلاع این چندضلعی را به‌دست آورید.

۱۱. هر عبارت را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

الف) $۸x^۲y^۴ - ۱۲x^۳y^۳ + ۴x^۲y^۳ =$

ب) $۵(۲a - ۳) - (۲a - ۳) =$

ج) $۶ax + ۳a - ۴x - ۲ =$

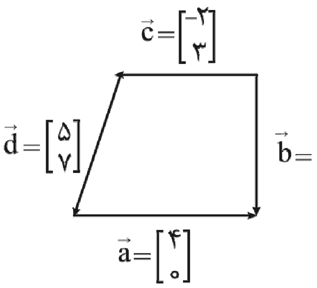
۱۲. با توجه به معادله‌ی کسری روبه‌رو، کدام تساوی درست است؟

$$\frac{x + ۳}{۲} - ۱ = \frac{۲x - ۶}{۵}$$

الف) $۵(x + ۳) = ۲(۲x - ۶)$

ب) $۵(x + ۱) = ۲(۲x - ۶)$

۱۳. با توجه به شکل مقابل، مختصات بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.



۱۴. در تساوی زیر مقدار x را به دست آورید.

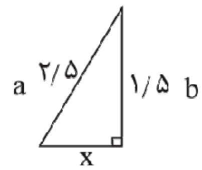
$$-\frac{۳}{۲}\begin{bmatrix}۶\\-۹\end{bmatrix}+(-\frac{۱}{۲})x=\begin{bmatrix}۴\\-۶\end{bmatrix}$$

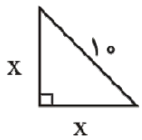
۱۵. اگر دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ هم اندازه و هم جهت باشند و $\vec{a}=\begin{bmatrix}۴x+۸\\x+۱\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}x-۱\\-۲\end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

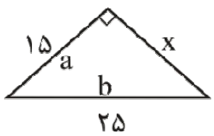
۱۶. نقطه $A=\begin{bmatrix}۲m-۱\\۱-۳n\end{bmatrix}$ بر محور طول‌ها و نقطه $B=\begin{bmatrix}m+۳\\۳n-۲\end{bmatrix}$ بر محور عرض‌ها واقع‌اند، مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ را به دست آورید.

۱۷. نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}$ ابتدای بردار $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۵\\-۴\end{bmatrix}$ است. انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ را به دست آورید.

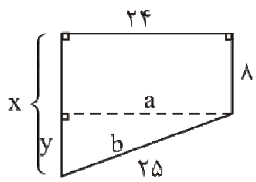
۱۸. در هریک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر، ضلع خواسته شده را به دست آورید.

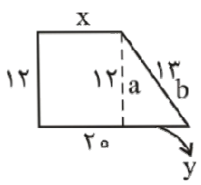






۱۹. در ذوزنقه‌های زیر x را به دست آورید.





۲۰. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC طول هر ضلع برابر با a است.

الف) ارتفاع را بر حسب a به دست آورید.

ب) مساحت را برحسب a به دست آورید.

ج) به کمک فرمول قسمت (الف) و (ب) ، ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۸ سانتی‌متر را حساب کنید.

۲۱. اگر عدد $N=۲^۵\times۳^۲\times۷\times\square$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $\square$ برابر است با....

۱) ۵ ۲) ۲۰ ۳) ۷۵ ۴) ۳۶ ۵) ۱۸

۲۲. حاصل عبارت $۶^۶+۶^۶+۶^۶+۶^۶+۶^۶+۶^۶$ به صورت توان‌دار چند است؟

۲۳. حاصل $(۴^۷+۴^۷+۴^۷+۴^۷)(۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷)$ به صورت توان‌دار چند است؟

۲۴. مقدار تقریبی $\sqrt{۱۱}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

۲۵. حاصل عبارت $۳\times۴^۲-(۸\div۲)$ چند است؟

۲۶. عددی از ۲ برابر مربع ۴، ۶ تا کمتر است، این عدد کدام است؟

۲۷. اگر داشته باشیم $۱۰^x-۱۰=۹۹۹۰$، آن گاه مقدار x چند است؟

۲۸. مقدار $\left(\sqrt{\sqrt{۹}+\sqrt{۱}}\right)^۴$ چند است؟

۲۹. در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را پیدا کنید.

الف) $۲^{x-۱}=۲^۵$

ب) $۴^x+۴^x+۴^x+۴^x=۶۴$

ج) $\frac{۲^۸+۲^۷+۲^۶}{۷}=۴^x$

۳۰. اعداد $۲۵^۶$ و $۲۷^۴$ و $۶۴^۲$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۱.

الف) $(-۱)^۱-(-۱)^۲-(-۱)^۳-...-(-۱)^{۱۳۹۴}=-۱-\cancel{۱}+\cancel{۱}-\cancel{۱}+...+\cancel{۱}-۱=-۲$

ب) صورت : $\frac{۲۵\times(۲۵+۱)}{۲}=\frac{۲۵\times\cancelto{۱۳}{۲۶}}{\cancel{۲}}=۲۵\times۱۳$

$\Rightarrow\frac{۲۵\times۱۳}{۲۵}=۱۳$

ج) $-۱\frac{۲}{۵}\times(-۳\frac{۵}{۸})=-\frac{۷}{۵}\times(-\frac{۲۹}{۸})=\frac{۲۰۳}{۴۰}=۵\frac{۳}{۴۰}$

د) $-\frac{۴}{۳}-(+\frac{۵}{۱۲})=\frac{-۱۶-۵}{۱۲}=-\frac{۲۱}{۱۲}=-۱\frac{۹}{۱۲}$

۲.

داریم:

$$۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$$۱+\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۱+۳=۴$$

$$۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

۳.

داریم:

$$\frac{A+B}{۲}-۵=A$$

$$\frac{-۸+B}{۲}-۵=-۸ \quad \Rightarrow \quad \frac{-۸+B}{۲}=-۳ \Rightarrow -۸+B=-۶ \Rightarrow B=-۶+۸=۲$$

۴.

$$۲۱۸=۲^{۱}\times ۱۰۹^{۱} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها}=(۱+۱)(۱+۱)=۲\times۲=۴$$

$$۱۹۲=۲^{۶}\times ۳^{۱} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها}=(۶+۱)(۱+۱)=۷\times۲=۱۴$$

$$۳۰۷=۱\times ۳۰۷ \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها}=۲$$

$$۷۲=۲^{۳}\times ۳^{۲} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها}=(۳+۱)(۲+۱)=۴\times۳=۱۲$$

$$۳۰۱=۷^{۱}\times ۴۳^{۱} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها}=(۱+۱)(۱+۱)=۲\times۲=۴$$

۵.

ابتدا عددهای از ۱۰۰ تا ۱۲۰ را نوشته و سپس به کمک روش غربال، مضرب‌های عدد ۲ ، ۳ ، ۵ و ۷ را خط می‌زنیم.

$$\cancel{۱۰۰}\quad \boxed{۱۰۱}\quad \cancel{۱۰۲}\quad \boxed{۱۰۳}\quad \cancel{۱۰۴}\quad \cancel{۱۰۵}\quad \cancel{۱۰۶}\quad \boxed{۱۰۷}\quad \cancel{۱۰۸}\quad \boxed{۱۰۹}\quad \cancel{۱۱۰}$$

$$\cancel{۱۱۱}\quad \cancel{۱۱۲}\quad \boxed{۱۱۳}\quad \cancel{۱۱۴}\quad \cancel{۱۱۵}\quad \cancel{۱۱۶}\quad \cancel{۱۱۷}\quad \cancel{۱۱۸}\quad \cancel{۱۱۹}\quad \cancel{۱۲۰}$$

آخرین عددی که خط می‌خورد عدد ۱۱۹ است که به عنوان مضرب ۷ خط می‌خورد. عددهایی که خط نخورده‌اند، عددهای اولند.

۶.

الف) (درست) کوچک‌ترین عدد با این دو شمارنده برابر $۵^{۱} \times ۳^{۱} = ۱۵$ است که $۴ = (۱+۱)(۱+۱)$ شمارنده دارد.

ب) (نادرست) کوچک‌ترین عدد با ۳ شمارنده اول متفاوت برابر است با $۳۰ = ۵ \times ۳ \times ۲$.

ج) (نادرست) تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰، ۴ تاست که عبارت است از $۲, ۳, ۵, ۷$.

د) (نادرست) تعداد شمارنده‌های یک عدد همواره فرد نیست، مثلاً عدد ۶ دارای چهار شمارنده $۱, ۲, ۳, ۶$ می‌باشد.

هـ) (درست) عدد ۴۷ یک عدد اول است، پس تنها شمارنده اول آن خود عدد می‌باشد.

۷.

چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، پس زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

$$x - ۱۸^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad x + ۴۲^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \quad x = ۱۸۰^\circ - ۴۲^\circ = ۱۳۸^\circ$$

۸.

الف)(درست) اگر قطرهای یک لوزی با هم برابر باشند، آن شکل حتماً مربع است.

ب) (نادرست) متوازی‌الاضلاعی که حداقل یک زاویه قائمه داشته باشد، حتماً مستطیل است. برای مربع بودن باید اضلاع با هم مساوی باشند.

ج) (نادرست) اگر اضلاع دو زاویه با هم موازی باشند، این دو زاویه هم می‌توانند مساوی باشند و هم مکمل.

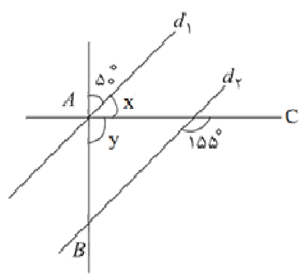
د) (درست) از اتصال متوالی وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع به هم، متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.

هـ) (نادرست) در متوازی‌الاضلاع، قطرها نیمساز نظیر زاویه‌ها نیستند، زیرا در این صورت متوازی‌الاضلاع به لوزی تبدیل می‌شود.

۹.

$d_{۱} \parallel d_{۲}, AC$ مورب $\Rightarrow \quad \hat{x} = ۱۸۰^\circ - ۱۵۵^\circ = ۲۵^\circ$

$\hat{y} = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۲۵^\circ) = ۱۰۵^\circ$



۱۰.

می‌دانیم که اندازه زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم از رابطه $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ به دست می‌آید. حال مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰n - ۳۶۰^\circ = ۱۵۰n \quad \Rightarrow \quad ۳۰n = ۳۶۰^\circ \quad \Rightarrow n = ۱۲$$

۱۱.

الف) $۸x^{۲}y^{۴}-۱۲x^{۳}y^{۳}+۴x^{۲}y^{۳}=۴x^{۲}y^{۳}(۲y-۳x+۱)$

ب) $۵(۲a-۳)-(۲a-۳)=(۲a-۳)(۵-۱)=۴(۲a-۳)$

ج) $۶ax+۳a-۴x-۲=۳a(۲x+۱)-۲(۲x+۱)=(۳a-۲)(۲x+۱)$

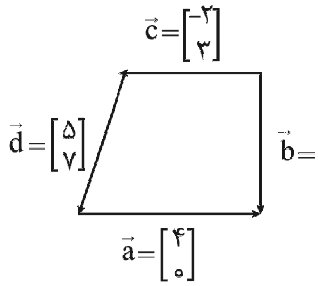
۱۲.

تساوی ب درست است، زیرا:

$$\frac{x+۳}{۲}-\frac{۱}{۱}=\frac{۲x-۶}{۵}\Rightarrow\frac{x+۳-۲}{۲}=\frac{۲x-۶}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{x+۱}{۲}=\frac{۲x-۶}{۵}\Rightarrow ۵(x+۱)=۲(۲x-۶)$$

۱۳.



$$\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ ۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\ ۱۰\end{bmatrix}$$

۱۴.

$$-\frac{۱}{۲}x=\begin{bmatrix}۴\\ -۶\end{bmatrix}+\left(\frac{۳}{۲}\right)\begin{bmatrix}۶\\ -۹\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad-\frac{۱}{۲}x=\begin{bmatrix}۴\\ -۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹\\ -\frac{۲۷}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad-\frac{۱}{۲}x=\begin{bmatrix}۱۳\\ -\frac{۳۹}{۲}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x=\begin{bmatrix}۱۳\div(-\frac{۱}{۲})\\ -\frac{۳۹}{۲}\div(-\frac{۱}{۲})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۶\\ +۳۹\end{bmatrix}$$

۱۵.

وقتی دو بردار هم اندازه و هم جهت‌اند که طول‌های آن با هم و عرض‌های آن‌ها نیز با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix}۴x+۸\\ x+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-۱\\ -۲\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}۴x+۸=x-۱\quad\Rightarrow\quad ۳x=-۹\quad\Rightarrow\quad x=-۳\\ x+۱=-۲\quad\Rightarrow\quad x=-۳\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{x=-۳}\vec{b}=\begin{bmatrix}x-۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳-۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\ -۲\end{bmatrix}$$

۱۶.

چون A روی محور طول‌هاست لذا عرض آن صفر می‌شود به همین ترتیب طول نقطه‌ی B نیز صفر می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}2m-1\\1-3n\end{bmatrix} \Rightarrow 1-3n=0 \Rightarrow n=\frac{1}{3}$$

$$B=\begin{bmatrix}m+3\\3n-2\end{bmatrix} \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m=-3$$

$$A\xrightarrow{n=\frac{1}{3},m=-3}\begin{bmatrix}2(-3)-1\\1-3(\frac{1}{3})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\0\end{bmatrix}$$

$$B\xrightarrow{n=\frac{1}{3},m=-3}\begin{bmatrix}-3+3\\3(\frac{1}{3})-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$$

۱۷.

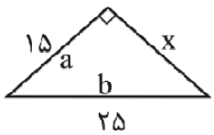
مختصات بردار + مختصات ابتدا = مختصات انتهای بردار

$$B=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix}$$

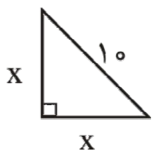
$$\vec{n}=-3\vec{i}+4\vec{j}=-3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$$

۱۸.

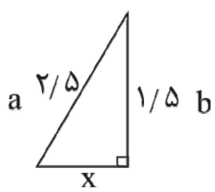
$$b^2-a^2=x^2$$
$$25^2-15^2=625-225$$
$$\Rightarrow x^2=400 \Rightarrow x=\sqrt{400}=20$$



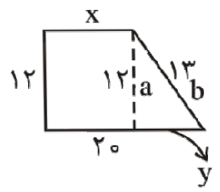
$$x^2+x^2=10^2$$
$$2x^2=100$$
$$x^2=\frac{100}{2}=50$$
$$x=\sqrt{50}\simeq 7/07$$



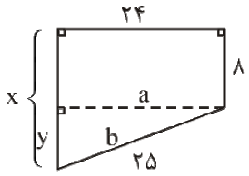
$$x^2=a^2-b^2$$
$$x^2=(2/5)^2-(1/5)^2$$
$$x^2=6/25-2/25=4$$
$$x=\sqrt{4}=2$$



.۱۹



$$a^۲ + y^۲ = b^۲$$
$$y^۲ = ۱۳^۲ - ۱۲^۲$$
$$y^۲ = ۱۶۹ - ۱۴۴$$
$$y = \sqrt{۲۵} = ۵$$
$$۲۰ - ۵ = ۱۵ \rightarrow x$$



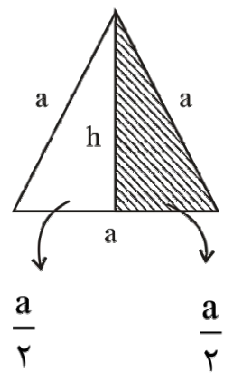
$$y^۲ = b^۲ - a^۲$$
$$y^۲ = ۲۵^۲ - ۲۴^۲ \Rightarrow ۶۲۵ - ۵۷۶ = ۴۹$$
$$y = \sqrt{۴۹} = ۷$$
$$x = ۷ + ۸ = ۱۵$$

.۲۰

با توجه به شکل و به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

ب)

$$h^۲ = a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow h^۲ = \frac{۴a^۲ - a^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$



$$S = \frac{h \times a}{۲} \Rightarrow S = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

ج)

$$h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳} \times \overset{۴}{\cancel{۸}}}{\cancel{۲}} = ۴\sqrt{۳}cm \rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳} \times \overset{۱۶}{\cancel{۶۴}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}} = ۱۶\sqrt{۳}cm^۲$$

۲۱. گزینه «۳» صحیح است.

از آنجا که $۵^۲ \times ۲^۲ = ۱۰۰$، برای اینکه N بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، باید حداقل دو عامل ۲ و حداقل دو عامل ۵ داشته باشد. حال با توجه به مقدار N، □ باید حداقل دو عامل ۵ داشته باشد و تنها گزینه‌ای که دو عامل ۵ دارد ۷۵ است. بنـابراین مقـدار □، ۷۵ است.

.۲۲

می‌دانیم عمل ضرب برای خلاصه نویسی جمع تکراری یک عدد با خودش است. پس داریم:

$$۶^۶ + ۶^۶ + ۶^۶ + ۶^۶ + ۶^۶ + ۶^۶ = ۶ \times ۶^۶ = ۶^۷$$

۲۳.

به کمک قوانین توان داریم:

$$(۴^۷+۴^۷+۴^۷+۴^۷)(۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷)=۴\times۴^۷\times۵\times۵^۷=۴^۸\times۵^۸=۲۰^۸$$

۲۴.

۱۶>۱۱>۹ پس $۳<\sqrt{۱۱}<۴$ و $(۳/۵)^۲=۱۲/۲۵$ پس:

عدد	۳/۳	۳/۴
مجذور	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

$$۳/۳<\sqrt{۱۱}<۳/۴$$

۳/۳۵ در وسط فاصله ۳/۳ و ۳/۴ قرار دارد و $(۳/۳۵)^۲=۱۱/۲۲۲۵$ پس:

عدد	۳/۳۱	۳/۳۲	۳/۳۳
مجذور	۱۰/۹۵۶۱	۱۱/۰۲۲۴	۰۸۸ ۱۱/۹

$$\sqrt{۱۱}\simeq۳/۳۲$$

۲۵.

$$۳\times۴^۲-(۸\div۲)=۳\times۱۶-۴=۴۸-۴=۴۴$$

۲۶.

$$۲\times(۴^۲)-۶=۲\times(۱۶)-۶=۲۶$$

در نتیجه این عدد برابر ۲۶ است.

۲۷.

داریم:

$$۱۰^x-۱۰=۹۹۹۰ \Rightarrow ۱۰^x=۱۰۰۰۰ \Rightarrow ۱۰^x=۱۰^۴ \Rightarrow x=۴$$

۲۸.

$$(\sqrt{\sqrt{۹}+\sqrt{۱}})^۴=(\sqrt{۳+۱})^۴=(\sqrt{۴})^۴=۲^۴=۱۶$$

۲۹.

الف) اگر دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی با هم برابر باشند، توان‌های آن‌ها نیز با هم مساوی است. لذا $x-۱=۵$ پس $x=۶$.

ب) می‌دانیم عمل ضرب برای خلاصه نویسی جمع تکراری یک عدد با خودش است. بنابراین:

$$۴^x+۴^x+۴^x+۴^x=۶۴ \Rightarrow ۴\times۴^x=۶۴=۴^۳ \Rightarrow ۴^{x+۱}=۴^۳ \Rightarrow x+۱=۳ \Rightarrow x=۲$$

ج) از صورت کسر، $۲^۶$ را فاکتور می‌گیریم. داریم:

$$\frac{۲^۸+۲^۷+۲^۶}{۷}=\frac{۲^۶(۲^۲+۲+۱)}{۷}=\frac{۲^۶\times۷}{۷}=۲^۶$$

از طرفی می‌توانیم بنویسیم $۴^x=(۲^۲)^x=۲^{۲x}$ پس $۲^{۲x}=۲^۶$. درنتیجه $۲x=۶$ و بالاخره $x=۳$ خواهد شد.

.۳۰

هر سه عدد را به صورت زیر مرتب می کنیم.

$$۲۵^{۶} = (۵^{۲})^{۶} = ۵^{۱۲}$$
$$۲۷^{۴} = (۳^{۳})^{۴} = ۳^{۱۲}$$
$$۶۴^{۲} = (۲^{۶})^{۲} = ۲^{۱۲}$$

واضح است که $۵^{۱۲} > ۳^{۱۲} > ۲^{۱۲}$.