فصل ۱

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در سال گذشته، با مفهوم مجموعه آشنا شدیم. در این‌جا قصد داریم، مفاهیم جدید و کاربردی‌تری در مورد مجموعه‌ها معرفی کنیم.

مجموعه‌هایی که می‌شناسیم و از آن‌ها بسیار استفاده می‌شود، را دوباره معرفی می‌کنیم. لازم است که این مجموعه‌ها را همواره به یاد داشته باشیم و رابطه‌ای بین آن‌ها را بدانیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی	$:\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$
مجموعه‌ی اعداد حسابی	$:\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$
مجموعه‌ی اعداد صحیح	$:\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$
مجموعه‌ی اعداد گویا	$:\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$
مجموعه‌ی اعداد گنگ	مجموعه‌ی اعداد حقیقی، که نمی‌شود آن‌ها را به‌صورت کسر متعارفی نوشت $=\mathbb{Q}':$
مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$:\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

باتوجه به مطالب نوشته شده، مشخص است که رابطه‌ی زیر بین مجموعه‌های بالا برقرار است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

بنابراین:

۱) $\mathbb{N} - \mathbb{Q} = \phi$

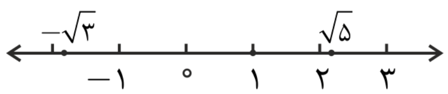
۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -۲, -۱\}$

۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

نکته

باید بدانیم که هر عدد دلخواهی در نظر بگیریم، یک نقطه متناظر با آن روی محور اعداد حقیقی وجود دارد و همچنین متناظر با هر نقطه روی محور، یک عدد حقیقی وجود دارد.

به عنوان مثال اعضای مجموعه‌های $A = \{-\sqrt{۳}, ۱, \sqrt{۵}\}$ را به‌صورت زیر روی محور اعداد حقیقی داریم:



بازه‌ها

در این قسمت قصد داریم شما را با مفهوم بازه آشنا کنیم، که در زندگی روزمره ما کاربرد زیادی دارد.

درختانی را تصور کنید، که در طول یک پیاده‌رو عریض کاشته شده‌اند.

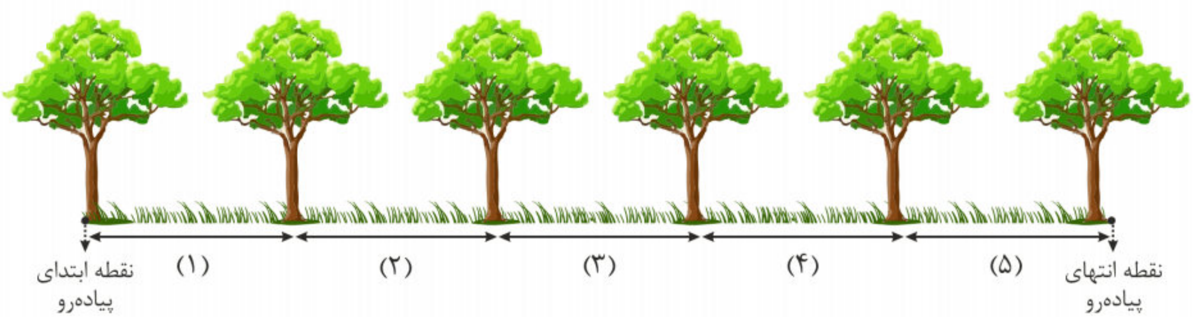
تا به حال به فاصله‌ی بین آن‌ها دقت کرده‌اید؟ آیا آن‌ها به فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شده‌اند؟

درختان، نیمکت‌ها، لامپ‌های چراغ برق و ... معمولاً در فاصله‌های یکسان از هم قرار داده می‌شوند.

در ریاضیات، بازه‌ها به ما کمک می‌کنند تا بتوانیم بسیاری از مسئله‌ها را حل کنیم.

به عنوان مثال می‌توانیم از بازه‌ها، برای مشخص شدن طول یک پیاده‌رو استفاده کنیم، یا حتی تعداد درختانی که در طول یک پیاده‌رو کاشته شده‌اند را بیابیم.

به عنوان مثال اگر شش درخت در طول یک پیاده‌رو از نقطه‌ی ابتدایی آن تا نقطه‌ی انتهایی آن، با فاصله‌ی مساوی کاشته شده باشند، داریم:

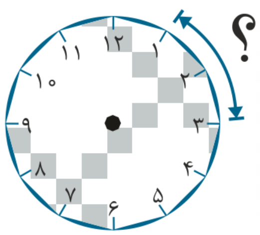


۱	تعداد	تعداد
	بازه‌ها	درختان
طول بازه‌ها	تعداد	طول
	بازه‌ها	پیاده‌رو
۱− تعداد درختان = طول	طول	تعداد
بازه‌ها	پیاده‌رو	بازه‌ها

بنابراین یکی از کاربردهای بازه را دیدیم.

به سوال‌های زیر فکر کنید.

۱. برنامه‌ی مورد علاقه‌ی علی ساعت ۳ عصر، شروع می‌شود. علی ساعت ۱ عصر از مدرسه به خانه می‌آید. چقدر طول می‌کشد تا برنامه‌ی مورد علاقه‌ی علی شروع شود؟



۲. کلاس آقای احمدی ساعت ′۱۱:۳۰ شروع می‌شود و در ساعت ′۱:۰۰ به پایان می‌رسد. آقای احمدی چه مدت در کلاس، تدریس می‌کند؟

در این سوال‌ها، بازه‌های زمانی مدنظر بودند.

حال می‌توانیم بازه‌ی اعداد را به زبان ریاضی تعریف کنیم.

تعریف

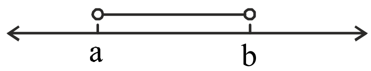
بازه‌ها زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند که می‌توان آن‌ها را در چند دسته‌ی زیر تقسیم‌بندی کرد.

۱- بازه‌ی باز

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، در این‌صورت مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بین a و b (که شامل خود a و b نباشند) را به‌صورت (a,b) نمایش می‌دهیم و آن را بازه‌ی باز بین a و b می‌نامیم. نماد ریاضی آن به‌صورت زیر است:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$$

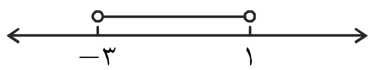
همچنین نمایش هندسی آن روی محور، به این‌گونه است:



مثال

$A=(-۳,۱)=\{x\in\mathbb{R}\,|-۳<x<۱\}$: بازه باز A بین $(-۳,۱)$

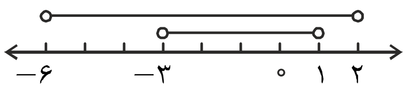
این بازه روی محور به صورت زیر نمایش داده شده است:



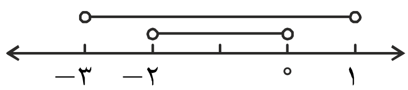
باتوجه به توضیحاتی که دادیم، واضح است که روابط زیر برقرارند:

$-۲\in A \qquad ۰\in A \qquad ۳\notin A \qquad \sqrt{۵}\notin A$

واضح است که $(-۳,۱)\subset(-۶,۲)$ است.



و همچنین $(-۲,۰)\subset(-۳,۱)$.



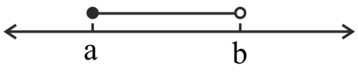
بنابراین رابطه‌ی زیر را داریم:

$$(-۲,۰)\subset(-۳,۱)\subset(-۶,۲)$$

بازه‌ی نیم‌باز

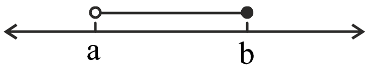
بازه‌ی نیم‌باز از راست a و b (یا نیم بسته از چپ)، که $(a<b)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$$



بازه‌ی نیم‌باز از چپ، نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$$



واضح است که:

$$A=(a,b]\not\subseteq[a,b)=B$$

زیرا $b\in A$ است، ولی $b\notin B$.

بازه‌ی بسته

بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ که $a<b$، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}=(a,b)\cup\{a,b\}$$

نمایش هندسی آن را روی محور مشاهده کنید.

واضح است که:

$$(a,b)\subseteq[a,b]$$
$$(a,b]\subseteq[a,b]$$
$$[a,b)\subseteq[a,b]$$

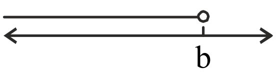
بازه‌های بی‌کران

بازه‌هایی که حداقل یک طرف آن $+\infty$ یا $-\infty$ است، بازه‌های بی‌کران نام دارند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.
(دقت کنیم $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند و یک نماد ریاضی‌اند.)

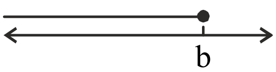
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\}$$



$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le b\}$$



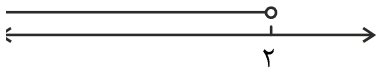
مجموعه‌ی اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

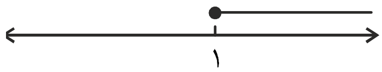
مثال

همان‌طور که می‌بینید، در زیر بازه‌های متناظر با هر محور مشخص شده‌اند.

$(-\infty,۲)$

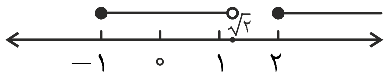


$[۱,+\infty)$

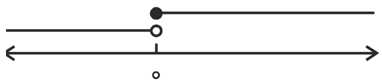


$[-۲,۰)$

$[-۱,\sqrt{۲})\cup[۲,+\infty)$



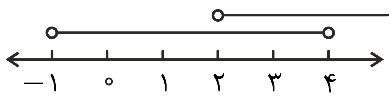
$[-\infty,۰)\cup[۰,+\infty)$



حال در ادامه بازه‌های مشخص شده را روی محور نمایش می‌دهیم.

$(-۱,۴)\cup(۲,+\infty)$

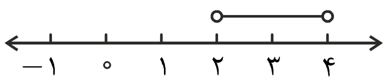
اول هرکدام از بازه‌ها را روی محور نشان می‌دهیم:



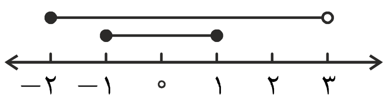
اجتماع این دو بازه به‌صورت زیر است:

$(-۱,۴)\cap(۲,+\infty)$

حال اشتراک آن‌ها را نمایش می‌دهیم:



$[-۱,۱]\cup[-۲,۳)$



اجتماع دو بازه برابر با مجموعه‌ی بزرگ‌تر می‌شود.

نکته

اگر $A \subseteq B$ باشد، $A \cup B = B$.

در زیر نمایش بازه‌ای بعضی از زیرمجموعه‌های پر کاربرد اعداد حقیقی را می‌بینید:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$
$$\mathbb{R}^{>0} = \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$$
$$\mathbb{R}^{<0} = \mathbb{R}^{-} = (-\infty, 0)$$
$$\mathbb{R}^{\geq 0} = [0, +\infty)$$
$$\mathbb{R}^{\leq 0} = (-\infty, 0]$$

اگر $a \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه $[a,a] = a$ و $(a,a) = \phi$.

شعاع بازه

برای یک بازه می‌توان شعاع تعریف کرد، شعاع یک بازه را نصف طول آن بازه در نظر می‌گیریم.

اگر a و $b \in \mathbb{R}$ باشند، شعاع بازه‌ی (a,b) برابر با $\frac{b-a}{2}$ است.

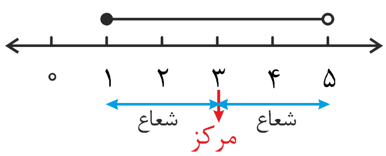
اگر یکی از نقاط a یا b، ∞ باشند، شعاع بازه را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

(باز یا بسته بودن بازه، تأثیری در اندازه‌ی شعاع ندارد.)

همچنین مرکز بازه‌ی (a,b) را $\frac{a+b}{2}$ تعریف می‌کنیم.

مثال

شعاع و مرکز بازه‌ی $[1,5)$ به ترتیب ۲ و ۳ است.



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه یکی از مفاهیم بنیادی و اساسی در ریاضیات است که در بسیاری از مواقع در حل مسئله‌های مختلف از آن استفاده می‌شود. بنابراین لازم است، تا آن‌جا که می‌توانیم درمورد آن اطلاعات داشته باشیم.

در سال گذشته تا حدی با مفهوم مجموعه آشنا شدید، در این قسمت قصد داریم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را به شما معرفی کنیم.

در مورد متن زیر فکر کنید.

یک مدرسه‌ی پسرانه قصد دارد در روز دانش‌آموز، به بچه‌های کلاس اولی خود ماشین اسباب‌بازی هدیه بدهد. بدیهی است که باید تعداد دانش‌آموزان کلاس اولی مشخص باشد تا به همه‌ی آن‌ها ماشین اسباب‌بازی برسد. زیرا اگر تعداد هدیه‌ها کمتر باشد، ممکن است خاطره‌ی خوبی به جا نماند!

اگر دانش‌آموزان کلاس اول را یک مجموعه در نظر بگیریم، متن بالا نشان می‌دهد که دانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دارای اهمیت است.

مثال

تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۱) مجموعه‌ی روزهای هفته

۲) مجموعه‌ی شن‌های کنار ساحل

تعریف

مجموعه‌ای را متناهی (باپایان) می‌گوییم، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حسابی $\{0,1,2,...\}$ باشد، یا در واقع عمل شمارش اعضای آن به پایان برسد.

در مثال بالا، مجموعه‌ی روزهای هفته قابل شمارش است، ولی مجموعه‌ی شن‌های کنار ساحل را نمی‌توان شمرد.

مجموعه‌ای را نامتناهی (بی‌پایان) می‌گوییم، هرگاه متناهی نباشد.

لازم به یادآوری است که تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

یادآوری: تعداد اعضای مجموعه‌ی ϕ را صفر درنظر می‌گیریم.

برای آشنا شدن با مفهوم مجموعه‌ی نامتناهی یا عدد بی‌نهایت، از مثالی آشنا در ریاضیات استفاده می‌کنیم.

زندگی در هتل آقای هیلبرت

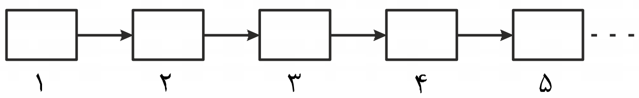
آقای هیلبرت صاحب تنها هتل توریستی یک شهر عجیب است. اگر بخواهیم هتل آقای هیلبرت را توصیف کنیم، باید بگوییم اتاق‌های این هتل تمامی ندارد! (و این همان مفهوم بی‌نهایت است.) یعنی برای هر شخصی که وارد این هتل شود، اتاق وجود دارد.

تصور کنید که به مسافر شماره‌ی ۱، اتاق ۱؛ مسافر شماره‌ی ۲، اتاق ۲ و به همین ترتیب بـه مسـافر شـماره‌ی n، اتـاق n داده شده است.

درست در شرایطی که تمام اتاق‌های هتل پر شده یکی از بازرسان اتحادیه هتل‌داران، برای بازرسی به هتل می‌آیـد و قصـد دارد که چند روزی در آن اقامت داشته باشد.

در هتل آقای هیلبرت اتاق مربوط به بازرسان، همیشه اتاق شماره‌ی ۱ بوده است. به نظر شما آیا راهی وجود دارد کـه ایـن بازرس در اتاق شماره‌ی ۱ ساکن شود؟

پاسخ این سوال مثبت است. چون اتاق‌های این هتل تمامی ندارند، می‌توان مسافر شماره‌ی ۱ را به اتاق شماره‌ی ۲، مسـافر شماره‌ی ۲ را به اتاق شماره‌ی ۳ و ... به همین ترتیب این کار را ادامه داد و بازرس را که مسافر شماره‌ی ۰ در نظر مـی‌گیـریم، در اتاق شماره‌ی ۱ ساکن کرد.



باتوجه به مثال بالا، مجموعه‌های $\mathbb{W}$ و $\mathbb{N}$، مجموعه‌های نامتناهی هستند، زیرا بی‌نهایت عضو دارند.

مثال

مجموعه‌های متناهی

۱) $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$

$n(A)=۱۰$، بنابراین مجموعه‌ای متناهی است.

۲) $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \;,\; ۲<x<۹\}$

اعضای B به‌صورت مجموعه‌ی $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ است، بنابراین $n(B)=۶$ و B مجموعه‌ای متناهی است.

۳) $C=\{x \mid x\in\mathbb{N} \;,\; x\leq ۹\}$

اعضای C به‌صورت مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ است، $n(B)=۹$ و C مجموعه‌ای متناهی است.

۴) $D=\{x \mid x\in\mathbb{N}$, مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۲ و کمتر از ۱۰ باشد $x\}$

اعضای D به‌صورت مجموعه‌ی $\{۲,۴,۶,۸\}$ می‌باشد و $n(D)=۴$ و D مجموعه‌ای متناهی می‌باشد.

مثال

مجموعه‌های نامتناهی

۱) مجموعه‌ی اعداد حسابی $(\mathbb{W})$

می‌دانیم مجموعه‌های اعداد حسابی به‌صورت $\{۰,۱,۲,۳,...\}$ است. در این مجموعه، هر عددی که در نظر بگیریم، عددی می‌شود یافت که از آن بزرگ‌تر باشد. بنابراین تعداد اعضای این مجموعه قابل شمارش نیست. بنابراین $\mathbb{W}$، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۲) مجموعه‌ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$

مانند توضیحات (۱)، هر عددی که در $\mathbb{Z}$ درنظر بگیریم، عددی از آن بزرگ‌تر و از آن کوچک‌تر یافت می‌شود. بنابراین نمی‌توان تعداد اعضای $\mathbb{Z}$ را شمارش کرد، پس $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۳) مجموعه‌ی اعداد مثبت و مضرب ۳

مجموعه‌ی اعداد مثبت و مضرب ۳ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است و اعضای آن به‌صورت مجموعه‌ی $\{۳,۹,۱۲,۱۵,...\}$ است.

نکته

فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، B نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

دلیل: اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، بنابراین تعداد اعضای آن قابل شمارش نمی‌باشد و چون $A \subseteq B$ است، تعداد اعضای B یا برابر با A یا بزرگ‌تر از A است، بنابراین B هم مجموعه‌ای نامتناهی است.

مثال

می‌دانیم که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. باتوجه به نکته بیان شده و این‌که مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ نامتناهی است، هر کدام از مجموعه‌های $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نیز نامتناهی می‌شود.

نکته

فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، A نیز متناهی است.

دلیل: اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، بنابراین $n(B)$ یک عدد مشخص است و با توجه به این که $A \subseteq B$، حتما $n(A) \leq n(B)$ می‌شود. پس $n(A)$ نیز یک عدد مشخص است. بنابراین A نیز متناهی است.

متمم یك مجموعه

در این قسمت قصد داریم، متمم یک مجموعه را معرفی کنیم، متن زیر را با دقت بخوانید.

مادربزرگ علی در روستا زندگی می‌کند، علی طبیعت را بسیار دوست دارد. بنابراین تمام سال تحصیلی را به خوبی و با انرژی درس می‌خواند تا امتحاناتش را با موفقیت سپری کند و بتواند همه‌ی تعطیلات تابستان را به روستا برود علی در طول سال تحصیلی نمی‌تواند به روستا برود.

حال، اگر مجموعه‌ی ماه‌های سال را U، مجموعه‌ی ماه‌های تابستان را A و بقیه‌ی ماه‌های سال را A' بنامیم، اعضای این مجموعه‌ها به‌صورت زیر هستند:

$U = \{$مهر، آبان، آذر، دی، بهمن، اسفند، فروردین، اردیبهشت، خرداد، تیر، مرداد، شهریور$\}$

$A = \{$تیر، مرداد، شهریور$\}$

$A' = \{$مهر، آبان، آذر، دی، بهمن، اسفند، فروردین، اردیبهشت، خرداد$\}$

در این مثال U مجموعه‌ی همه‌ی ماه‌های سال، A مجموعه‌ی ماه‌هایی است که علی می‌تواند به روستا برود و A' مجموعه‌ی بقیه‌ی ماه‌های سال (به غیر از ماه های تابستان) است.

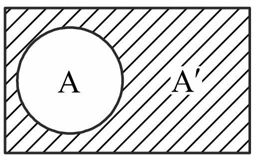
تعریف

مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی در بحث مورد نظر است و تمام مجموعه‌های دیگر به عنوان زیرمجموعه‌ی آن در نظر گرفته می‌شوند، این مجموعه را مجموعه‌ی جهانی نیز می‌نامند و معمولاً آن را با U نمایش می‌دهند. (حرف U از کلمه‌ی Universal گرفته شده است).

اکنون با تعریف کردن مجموعه‌ی مرجع، می‌توانیم متمم یک مجموعه را نیز تعریف کنیم.

متمم مجموعه‌ی A، $A \subseteq U$، را با A' نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای U است که در A نیستند. یعنی مجموعه‌ی $U - A$، قسمت‌های هاشورزده این مجموعه را مشخص می‌کند.

U



برای به‌دست آوردن متمم یک مجموعه، حتماً باید مجموعه‌ی مرجع مشخص باشد.

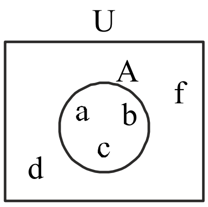
مثال

اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ ، $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ باشد، مجموعه‌های A' و B' را مشخص کنید.

$A'=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۰\}$

$B'=\{۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

شکل زیر را در نظر بگیرید.



با نگاه دقیقی به شکل بالا می‌بینیم که d و f در مجموعه‌ی U هستند، ولی عضو مجموعه‌ی A نیستند، بنابراین: $A'=\{d,f\}$ یا $d,f\in A'$.

با توجه به مجموعه‌های مشخص شده، متمم مجموعه A را بنویسید.

$U=\{x|\ x\in\mathbb{N}\ ,\ x\le ۷\}$

$A=\{x|\ x\in\mathbb{N}\ ,\ ۴\le x\le ۶\}$

باتوجه به سوال $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $A=\{۴,۵,۶\}$ بنابراین:

$A'=\{۱,۲,۳,۷\}$

نکته

حال که با مفهوم متمم یک مجموعه آشنا شدید، واضح است که روابط زیر برقرارند.

۱) $U'=\phi$

۲) $\phi'=U$

۳) $(A')'=A$

۴) $A\bigcap A'=\phi$

۵) $A\bigcup A'=U$

اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد طبیعی و مجموعه‌ی A را اعداد طبیعی زوج در نظر بگیریم، آن‌گاه، A'، مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد می‌شود.

اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم و $A=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ ۲\le x\le ۳\}$ ، مجموعه‌ی A' را مشخص کنید.

در زیر، مجموعه‌های U، A و B مشخص شده‌اند. اعضای مجموعه‌ی $(A\cap B)'$ و $(A')'$ را بنویسید.

$U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

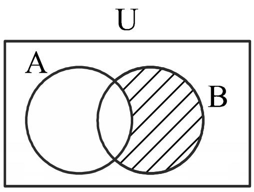
$A=\{۱,۵,۶\}$

$B=\{۳,۵,۶,۷\}$

نکته

فرض کنید U مجموعه‌ی مرجع و A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند.

همه‌ی ما با مجموعه‌ی $B-A$ آشنایی داریم. نمودار ون آن به‌صورت زیر است:



همان‌طور که در شکل می‌بینیم.

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

نکته

می‌دانیم $A'=U-A$ پس داریم:

$$n(A')=n(U)-n(A)$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در این قسمت قصد داریم رابطه‌ای برای محاسبه‌ی تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه ارائه دهیم.

متن زیر را به دقت بخوانید

در یک ناحیه از جنگل، ۱۰ عدد خرگوش زندگی می‌کنند که ۶ تای آن‌ها سفید و ۴ تای آن‌ها سیاه است.

مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A=\{$خرگوش‌هایی که سفید هستند$\}$

$B=\{$خرگوش‌هایی که سیاه هستند$\}$

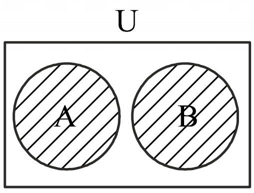
باتوجه به این دو مجموعه داریم:

$n(A)=۶$

$n(B)=۴$

$n(A\cup B)=۱۰$

نمودار ون این مثال به صورت زیر است:



در این مثال رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$n(A\cup B)\overset{?}{=}n(A)+n(B)$$

سوال: آیا می‌توان این رابطه را برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B نوشت؟

آیا می‌توانید مثالی بزنید که در آن رابطه‌ی بالا برقرار نباشد؟

به مثال زیر دقت کنید.

یک هنرکده که در تهران کلاس‌های نقاشی و خوشنویسی برگزار می‌کند، ۲۰۰ نفر هنرجو دارد. ۱۲۰ نفر از آن‌ها در کلاس خوشنویسی، ۱۰۰ نفر در کلاس نقاشی و ۲۰ نفر از آن‌ها در هر دو کلاس شرکت می‌کنند. مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$A=\{$هنرجوهایی که در کلاس خوشنویسی شرکت می‌کنند$\}$

$B=\{$هنرجوهایی که در کلاس نقاشی شرکت می‌کنند$\}$

$A\cap B=\{$هنرجوهایی که در هر دو کلاس شرکت می‌کنند$\}$

باتوجه به مجموعه‌های معرفی شده، داریم:

$n(A)=۱۲۰$

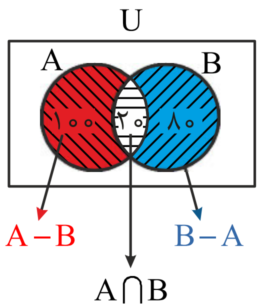
$n(B)=۱۰۰$

$n(A\cap B)=۲۰$

و

$n(A\cup B)=۲۰۰$

نمودار ون این مثال به‌صورت زیر است:



واضح است که رابطه‌ی گفته شده در مثال قبل، در این‌جا برقرار نیست.

باتوجه به شکل می‌بینیم که:

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)\quad\Rightarrow\quad n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\quad^{(*)}$$

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B)=n(A-B)+\underbrace{n(B-A)+n(A\cap B)}=n(A-B)+n(B)\overset{\text{با استفاده از }(*)}{=\!=\!=\!=}$$

$$n(A)-n(A\cap B)+n(B)$$

$$\Rightarrow\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

رابطه‌ی به‌دست آمده را می‌توانیم برای محاسبه‌ی تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه به‌کار ببریم.

همچنین از رابطه‌ی $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$ در حل مسئله‌ها استفاده می‌شود.

نکته

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، اگر این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند $(n(A\cap B)=۰)$ گوییم A و B دو مجموعه مجزا یا جدا از هم‌اند.

مثال

در یک کلاس، ۲۰ نفر از دانش‌آموزان در درس ریاضی و ۲۵ نفر از آن‌ها در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۱۵ نفر در هر دو درس قبول شده باشند، این کلاس چند نفره است؟

مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$A=\{$دانش‌آموزانی که در درس ریاضی قبول شده‌اند$\}$

$B=\{$دانش‌آموزانی که در درس فیزیک قبول شده‌اند$\}$

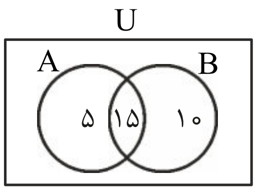
$A\cap B=\{$دانش‌آموزانی که در هر دو درس قبول شده‌اند$\}$

مشخص است که هدف این سوال پیدا کردن تعداد اعضای $A\cup B$ است. طبق رابطه‌ای که به دست آوردیم، داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۰+۲۵-۱۵=۳۰$$

پس این کلاس ۳۰ نفر دانش‌آموز دارد.

نمودار ون این مثال به‌صورت زیر است:



واضح است که رابطه‌ی گفته شده در مثال قبل، در این‌جا برقرار نیست.

نتیجه:

برای دو مجموعه جدا از هم A و B، تعداد عضوهای اجتماع این دو مجموعه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

۳ از بین ۱۰ دبیر یک آموزشگاه، ۶ نفر از آن‌ها فیزیک، ۵ نفر ریاضی و ۲ نفر هر دو درس را تدریس می‌کنند. چند نفر از آن‌ها، هیچ‌یک از این دو درس را تدریس نمی‌کنند؟

۴ اگر $A\cap B=\{۲,۴,۶,۸\}$، $n(A)=۱۰$ و $n(B)=۶$ باشد، تعداد اعضای $A\cup B$ را حساب کنید.

۵ اگر مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر داشته باشیم، تعداد اعضای $A\cup B$ را حساب کنید.

$A=\{$مضارب ۳ که کوچک‌تر از ۱۰ باشند$\}$

$B=\{$مضارب ۲ که کوچک‌تر از ۱۰ باشند$\}$

پاسخ مثال

۱

$A'=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۲\ \text{یا}\ \ x>۳\}$

۲

داریم $A\cap B=\{۵,۶\}$، بنابراین:

$(A\cap B)'=\{۱,۲,۳,۴,۷,۸,۹,۱۰\}$

همچنین $A'=\{۲,۳,۴,۷,۸,۹,۱۰\}$ و $(A')'=\{۱,۵,۶\}$

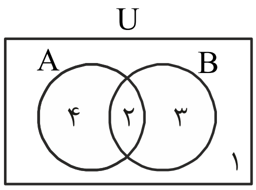
۳

$A=\{$دبیرانی که فیزیک تدریس می‌کنند$\}$

$B=\{$دبیرانی که ریاضی تدریس می‌کنند$\}$

$U=\{$کل دبیران این آموزشگاه$\}$

برای حل این سوال ابتدا نمودار ون را رسم می‌کنیم.



باتوجه به صورت سوال می‌دانیم که ۲ نفر از دبیران این آموزشگاه، هم فیزیک و هم ریاضی تدریس می‌کنند، بنابراین در قسمت اشتراکی عدد ۲ را می‌گذاریم و ۴ نفر فقط فیزیک درس می‌دهند (زیرا ۶ نفر تدریس فیزیک دارند) همچنین ۳ نفر فقط ریاضی درس می‌دهند.

مجموع این اعداد می‌شود (۳+۲+۴)، بنابراین فقط یک نفر می‌ماند که هیچ یک از این هر دو درس را تدریس نمی‌کند. (یعنی مثلاً شیمی درس می‌دهد.)

اگر بخواهیم پاسخ این سوال را به‌صورت فرمولی بنویسیم هدفی که این سوال دارد $n(A\cup B)'$ است.

$$n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-\big(n(A)+n(B)-n(A\cap B)\big)$$
$$=۱۰-(۶+۵-۲)=۱۰-۹=۱$$

۴

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۰+۶-۴=۱۲$$

۵

داریم:

$$A=\{۳,۶۹\}\quad ,\quad B=\{۲,۴,۶,۸\}\quad ,\quad A\cap B=\{۶\}$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳+۴-۱=۶$$

الگو و دنباله

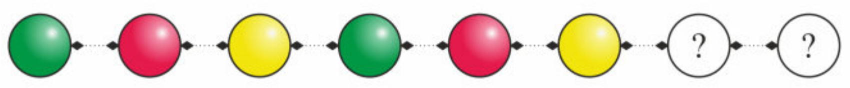
در این قسمت از درس قصد داریم در مورد الگو و دنباله در ریاضیات صحبت کنیم.

جالب است بدانیم ریاضیات در بسیاری از مواقع به ما کمک می‌کند تا بتوانیم پیش‌گویی کنیم!

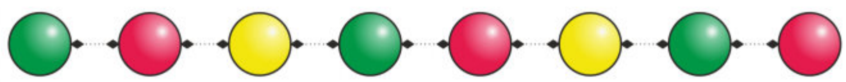
الگوها یکی از مباحث جالب در ریاضیات است، فهمیدن و درک کردن الگوها، یک قدرت جادویی است که با استفاده از آن می‌توانیم پیش‌گویی کنیم، کشف کنیم، جهان اطراف خود را بهتر درک کنیم و بیشتر لذت ببریم.

همچنین کار کردن با الگوها یک بازی است و باعث سرگرمی می‌شود.

در بعضی مواقع تشخیص یک الگو، کار راحتی است و گاهی اوقات کار پیچیده‌تری می‌شود.

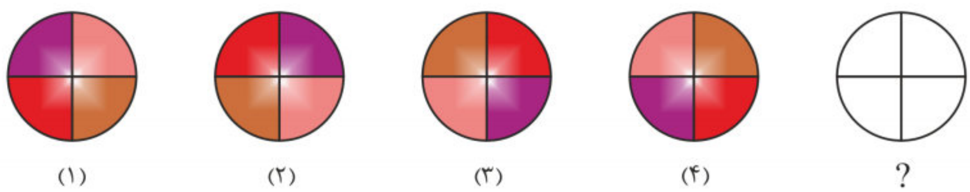


به نظر شما به جای دایره‌های خالی چه رنگ‌هایی بگذاریم؟

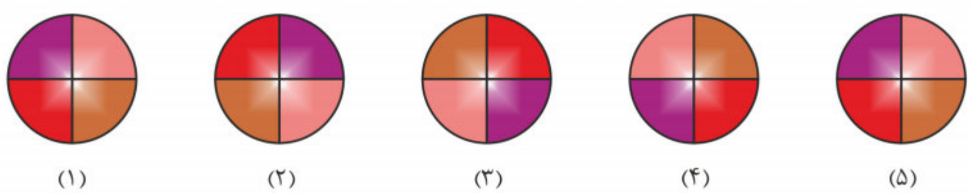


(بله درست حدس زدید!)

به نظر شما در شکل شماره ۵ ترتیب رنگ‌ها چگونه است؟



آیا الگوی خاصی در ذهن شما هست؟ می‌توانید بنویسید.



در اعداد نیز می‌توانیم الگوهای متعددی داشته باشیم.

تعریف

الگوی عددی مجموعه‌ای از اعداد است که با نظم و ترتیب خاصی با یکدیگر در ارتباط هستند.

مثال

آیا می‌توانید سه عدد بعدی در الگوی زیر را حدس بزنید.

۶۱ ,۵۹ ,۵۷ ,............. ,............. ,.............

در الگوی بالا هر عدد از عدد قبل خود دو واحد کمتر است. پس داریم:

۶۱ ,۵۹ ,۵۷ ,۵۵ ,۵۳ ,۵۱

جای خالی را در الگوی زیر پر کنید.

۷ ,۱۶ ,۲۵ ,۳۴ ,۴۳ ,۵۲ ,.............

در این الگو نیز هر عدد، از عدد قبلی خود ۹ واحد بیشتر است. بنابراین جای خالی عدد ۶۱=۹+۵۲ است.

می‌خواهیم چهارمین عدد الگوی زیر را در جدول داده شده بیابیم.

شماره	۱	۲	۳	۴
تعداد	۱۱۰	۱۷۰	۲۳۰	?

برای به‌دست آوردن عدد چهارم، ابتدا عدد اول را از عدد دوم کم می‌کنیم.

(۱۷۰−۱۱۰)=۶۰

دوباره عدد دوم را از عدد سوم کم می‌کنیم.

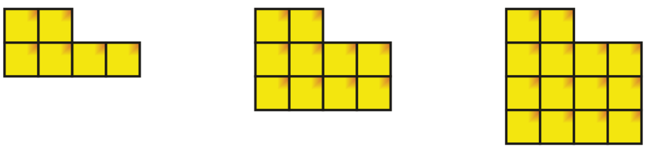
(۲۳۰−۱۷۰)=۶۰

حال اطمینان پیدا می‌کنیم که اختلاف عددهای این الگو ۶۰ است. یعنی هر عدد از عدد قبلی خود ۶۰ تا بیشتر است بنابراین عدد چهارم ۶۰ تا از عدد سوم بیشتر است. پس باید ۶۰ را به سومین عدد اضافه کنیم تا چهارمین عدد به‌دست بیاید.

۲۳۰+۶۰=۲۹۰

متن زیر را با دقت بخوانید

به تعداد مربع‌های به‌کار رفته در هر شکل دقت کنید.



(۱) (۲) (۳) (۴)

شکل	۲	۳	۴
تعداد	۱۰	۱۴	?

در الگوهای عددی، برای خلاصه‌نویسی از نمادگذاری ریاضی استفاده می‌کنیم. مثلاً به جای این که بگوییم شکل شماره‌ی یک می‌نویسیم a_1 (و می‌خوانیم a اندیس ۱).

به متغیرهای a_1، a_2 و a_3، متغیرهای اندیس‌دار می‌گوییم که مقادیر آن‌ها به‌ترتیب ۶، ۱۰ و ۱۴ است و به این مقادیر جملات الگو گفته می‌شود.

یعنی ۶، جمله‌ی اول الگو و ۱۰، جمله دوم الگو و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

با این نمادگذاری a_8 نشان‌دهنده‌ی تعداد مربع‌های شکل هشتم است و a_n تعداد مربع‌های شکل nاُم.

a_n را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم

a_n دارای اهمیت زیادی است، زیرا ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و با استفاده از آن می‌توان جملات الگو را به‌دست آورد.

به نظر شما در این الگو a_n چگونه به‌دست می‌آید.

با دقت در شکل‌ها می‌بینیم.

$$a_1 = 4+(1)\times 2 \qquad a_2 = 4+(3)\times 2 \qquad a_3 = 4+(5)\times 2$$
$$\Rightarrow a_n = 4+(2n-1)\times 2$$

حال a_4 و a_8 را به‌دست می‌آوریم:

$$a_4 = 4+(2\times 4-1)\times 2 = 4+14 = 18$$
$$a_8 = 4+(2\times 8-1)\times 2 = 4+30 = 34$$

الگوی خطی

همچنین جملات الگوی بالا را به‌صورت جدول زیر می‌توانیم بنویسیم.

بسط جمله‌ی a_n	**a_n**
$2+4$	a_1
$2+4+4$	a_2
$2+4+4+4$	a_3
$2+4+4+4+4$	a_4
	$\vdots$
$2+\underbrace{4+4+4+4+4+\dots+4}_{\text{n تا}}$	a_n

در نتیجه داریم:

تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی این الگو مقدار ثابت و ضریبی از ۴ است.

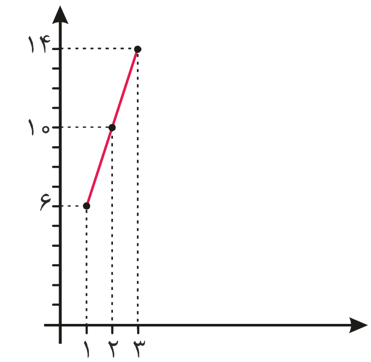
ثابت

$a_n = ۲ + ۴n$

متغیر

نمایش نقاط مشخص شده را روی صفحه‌ی مختصات ببینید.

(۱,۶) (۲,۱۰) (۳,۱۴)



معادله‌ی این خط $y = ۴x + ۲$ است. یعنی این نقاط روی خط $y = ۴x + ۲$ قرار دارند.

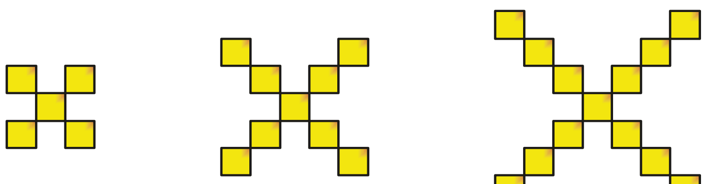
تعریف

فرض کنید a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابتی باشند، آن‌گاه الگوهایی با جمله‌ی عمومی $t_n = an + b$ را الگوهای خطی می‌نامیم. همان‌طور که در مثال قبل دیدید a شیب خط و b عرض از مبدأ معادله‌ی خط $y = ax + b$ است.

نکته

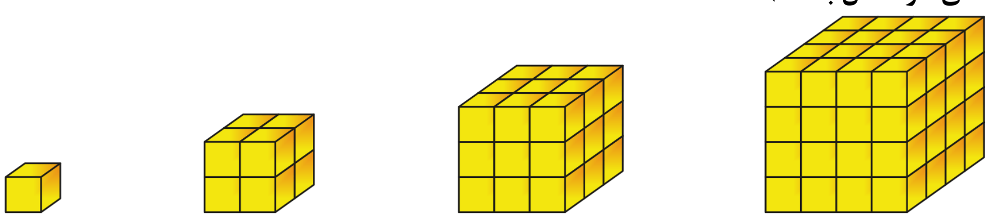
اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی در الگوهای خطی مقدار ثابتی است. (این مقدار ثابت همان ضریب n یعنی a است.)

آیا الگوی زیر یک الگوی خطی است؟ جمله‌ی عمومی آن را پیدا کنید. (فرض کنید a_n تعداد اضلاع مربع‌ها باشد.)



(۱) (۲) (۳)

باتوجه به الگوی زیر، جمله‌ی عمومی را بنویسید. آیا این الگو یک الگوی خطی است (فرض کنید a_n تعداد مکعب‌های هر شکل باشد.)



(۱) (۲) (۳) (۴)

دنباله

در بخش قبلی، برای هر الگوی هندسی، الگوی عددی متناظر با آن را نوشتیم.

دنباله‌های عددی مجموعه‌ای از اعداد هستند که با یک رابطه‌ی مشخص به‌طور متوالی به دنبال هم می‌آیند و با یکدیگر یک ارتباط ریاضی دارند.

این اعداد را جملات دنباله می‌گوییم.

دنباله‌های بازگشتی

دنباله‌هایی هستندکه برای نوشتن یک جمله‌ی آن باید جمله یا جملات قبل آن را بدانیم.

نکته

می‌دانیم $a_۱$، جمله‌ی اول، $a_۲$ جمله‌ی دوم و به همین ترتیب a_n جمله‌ی nاُم یک دنباله است. بنابراین واضح است که $a_{n-۱}$، جمله‌ی $n-۱$اُم و $a_{n-۲}$ جمله‌ی $n-۲$اُم است.

مثال

فرض کنید روابط زیر بین جملات یک دنباله برقرار باشد. جملات این دنباله را بنویسید.

$$\mathbf{a_۱ = a_۲ = ۱}$$

$$\mathbf{a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}\ ,\ n \geq ۳}$$

$$a_۳ = a_۲ + a_۱ = ۱+۱ = ۲$$
$$a_۴ = a_۳ + a_۲ = ۲+۱ = ۳$$
$$a_۵ = a_۴ + a_۳ = ۳+۲ = ۵$$
$$a_۶ = a_۵ + a_۴ = ۵+۳ = ۸$$

بنابراین جملات این دنباله به‌صورت زیر هستند:

۱ ,۱ ,۲ ,۳ ,۵ ,۸ , ...

دنباله‌ی ذکر شده، یکی از دنباله‌های آشنا در ریاضیات است و به دنباله‌ی فیبوناچی معروف است.

دنباله‌ای از اعداد به‌صورت زیر داریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را پیدا کنید و جمله‌ی صدم آن را بنویسید.

۳ ,۵ ,۷ ,۹ , ...

اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله $a_n = n(n-۱)$ باشد، جمله‌ی ۲۰۰اُم آن را به‌دست آورید.

پاسخ مثال

ابتدا اطلاعات مربوط به سوال را در قالب یک جدول می‌نویسیم:

n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴
a_n: تعداد اضلاع مربع‌ها	۲۰	۳۶	۵۲	?

هر جمله از جمله‌ی قبلی، ۴ واحد بیشتر است. باتوجه به شکل‌های کشیده شده و اعدادی که می‌بینیم، داریم:

بسط جمله‌ی a_n	a_n
$۴+۱۶$	۲۰
$۴+۱۶+۱۶$	۳۶
$۴+۱۶+۱۶+۱۶$	۵۲
$۴+۱۶+۱۶+۱۶+۱۶$	۶۸
	$\vdots$
$۴+\underbrace{۱۶+۱۶+\dots+۱۶}_{n\times ۱۶}$	a_n

پس داریم:

$$a_n = ۴+۱۶n$$

بنابراین با استفاده از تعریف قبلی، می‌بینیم که a_n یک الگوی خطی است.

ابتدا اطلاعات مربوط به سوال را در قالب یک جدول می‌نویسیم:

n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴
a_n: تعداد مکعب‌های هر شکل	۱	۸	۲۷	۶۴
بسط a_n	$(۱)^۳$	$(۲)^۳$	$(۳)^۳$	$(۴)^۳$

واضح است که $a_n = n^۳$ است.

$$a_۲ - a_۱ = ۸-۱ = ۷$$

$$a_۳ - a_۲ = ۲۷-۸ = ۲۱$$

می‌بینیم که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی این الگو، مقدار ثابتی نیست. هم با استفاده از رابطه‌ی به‌دست آمده $a_n = (n)^۳$ و هم با استفاده از اختلاف دو جمله‌ی متوالی، می‌بینیم که این الگو، خطی نیست.

با نگاهی به دنباله می‌بینیم که مجموعه‌ی اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱ نوشته شده است. جدول اطلاعات مربوط به دنباله را می‌نویسیم.

a_n	بسط جمله‌ی a_n
۳	$۲\times(۱)+۱$
۵	$۲\times(۲)+۱$
۷	$۲\times(۳)+۱$
۹	$۲\times(۴)+۱$
$\vdots$	
a_n	$۲\times(n)+۱$

جمله‌ی عمومی این دنباله به‌صورت $a_n=۲n+۱$ است.

$$a_{۱۰۰}=۲\times۱۰۰+۱=۲۰۱$$

$$a_{۲۰۰}=۲۰۰\times۱۹۹=۳۹۸۰۰$$

دنباله‌ی حسابی و هندسی

در درس گذشته با مفهوم الگو و دنباله آشنا شدید، در این قسمت قصد داریم در مورد دو نوع خاص از دنباله‌ها که کاربرد زیادی دارند، صحبت کنیم.

ابتدا دنباله‌های حسابی که در واقع یک یادآوری از درس قبل است را عنوان می‌کنیم. به تعریف زیر دقت کنید.

دنباله‌های حسابی

تعریف

دنباله حسابی در واقع یک رشته از اعداد است که به طور متوالی به دنبال هم می‌آیند و اختلاف هر جمله با جمله‌ی قبلی آن، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را با d نمایش می‌دهیم، همچنین جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را a می‌نامیم.

آیا تعریف بالا برای شما آشنا است؟

بله، درست حدس زدید. دنباله‌های حسابی، در واقع همان الگوهای خطی هستند، که در ادامه برای آن یک رابطه‌ی مشخص تعریف می‌کنیم و در حل مسائل خود از آن استفاده می‌کنیم. جملات دنباله‌ی حسابی را با توجه به تعریفی که انجام شد، برحسب a و d می‌نویسیم:

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\,\dots$$

مانند گذشته جدول اطلاعات مربوط به این دنباله را رسم می‌کنیم

n	t_n	بسط t_n	
۱	$t_۱$	a	$=a+۰d$
۲	$t_۲$	$a+d$	$=a+۱d$
۳	$t_۳$	$a+d+d$	$=a+۲d$
۴	$t_۴$	$a+d+d+d$	$=a+۳d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	$a+\underbrace{d+d+d+\cdots+d}_{n-۱}$	$=a+(n-۱)d$

دیدیم:

جمله‌ی n اُم یك دنباله‌ی حسابی (جمله‌ی عمومی آن) که جمله اول آن a و قدر نسبت آن d است به‌صورت $t_n=a+(n-۱)\,d$ می‌باشد.

مثال

با توجه به تعریف ابتدایی، جملات یک دنباله‌ی حسابی که قدر نسبت آن $d=۲$ و جمله‌ی اول آن $a=۵$ باشد را مشخص کنید.

داریم:

$$a=۵$$

در جای خالی اول، عدد ۵ را می‌گذاریم.

$$\underset{t_۱}{۵}\,,\,\underset{t_۲}{\_\_}\,,\,\underset{t_۳}{\_\_}\,,\,\underset{t_۴}{\_\_}\,,\,\dots$$

قدر نسبت این دنباله $d=۲$ است . یعنی اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ۲ ست.

بنابراین داریم:

$$t_۲=۵+۲=۷$$
$$t_۳=۷+۲=۹$$
$$t_۴=۹+۲=۱۱$$

$$\frac{۵}{t_۱}, \frac{۷}{t_۲}, \frac{۹}{t_۳}, \frac{۱۱}{t_۴}, \dots$$

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به‌صورت، $t_n = -۲ + ۵n$ است. چهار جمله‌ی اول این دنباله را مشخص کنید.

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی ...,۱۶,۱۰,۴,۲− را به‌دست آورید.

برای به‌دست آوردن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی $(t_n = a + (n-۱)d)$، باید جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را داشته باشیم.

با دقت در دنباله‌های حسابی داده شده می‌بینیم که جمله‌ی اول آن عدد ۲− است.

بنابراین داریم:

$$a = -۲$$

به نظر شما قدر نسبت چه عددی است؟

می‌دانیم که قدر نسبت، اختلاف یک جمله، از جمله‌ی قبلی آن است. بنابراین داریم:

$$d = t_۲ - t_۱ = ۴ - (-۲) = ۶$$

حال با داشتن a و d و دانستن رابطه‌ی $t_n = a + (n-۱)d$ داریم:

$$t_n = -۲ + (n-۱) \times ۶ = -۲ + ۶n - ۶ = ۶n - ۸$$

پس $t_n = ۶n - ۸$ است.

دنباله‌ی حسابی صعودی و نزولی

واضح است اگر قدر نسبت یک دنباله حسابی مثبت باشد، جمله‌های دنباله به مقدار ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدر نسبت منفی باشد، جمله‌های دنباله به مقدار ثابتی کاهش می‌یابند. اگر $d \geq ۰$ باشد، دنباله را یک دنباله‌ی صعودی و اگر $d < ۰$ باشد، دنباله را یک دنباله‌ی نزولی گوییم.

مثال

دو دنباله‌ی زیر که شروع یکسانی دارند، اما قدر نسبت یکی $d = ۱$ و قدر نسبت دیگری $d = -۱$ است را مشاهده کنید.

$d = ۱ \quad : ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \dots \Rightarrow$ (دنباله صعودی)

$d = -۱ \quad : ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, \dots \Rightarrow$ (دنباله نزولی)

نکته

اگر t_m و t_n دو جمله‌ی متفاوت و دلخواه از دنباله‌ی حسابی باشند، قدر نسبت دنباله برابر است با:

$$d=\frac{t_m-t_n}{m-n}$$

اگر t_r، t_s و t_p سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، نشان دهید $t_s=\frac{t_r+t_p}{۲}$.

جملات این دنباله به‌صورت زیر هستند:

$$t_r, t_s, t_p$$

چون یک دنباله‌ی حسابی داریم، بنابراین:

$$t_p-t_s=t_s-t_r \Rightarrow t_p+t_r=۲t_s$$
$$\Rightarrow t_s=\frac{t_p+t_r}{۲}$$

نکته

اگر بین دو جمله‌ی t_p و t_q، n عدد قرار دهیم، به‌طوری که $n+۲$ عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، در این حالت می‌گوییم بین t_p و t_q، n واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم.

بین ۲ و ۱۰ سه واسطه‌ی حسابی قرار دهید.

باید d را بیابیم.

$$۲, \_\_, \_\_, \_\_, ۱۰$$

داریم:

$$a=۲$$
$$t_۵=۱۰ \xrightarrow{t_n=a+(n-۱)d} ۱۰=۲+۴d \Rightarrow \boxed{d=۲}$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰$$

تعریف دنباله هندسی

دنباله‌ی هندسی یک رشته از اعداد است که در آن هر جمله از ضرب جمله‌ی قبلی در یک مقدار ثابت به‌دست می‌آید.

این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله‌ی هندسی می‌نامیم و آن را با r نمایش می‌دهیم.

به‌دست آوردن رابطه‌ی مربوط به دنباله هندسی

با توجه به تعریفی که ارائه شد، جمله‌های دنباله‌ی هندسی به صورت زیر هستند:

$$a \underset{\times r}{,} ar \underset{\times r}{,} ar^۲ \underset{\times r}{,} ar^۳ \underset{\times r}{,} \cdots$$

اطلاعات مربوط به این دنباله را نیز در جدول می‌نویسیم.

n	t_n	مقدار t_n
۱	$t_۱$	$a=ar^۰$
۲	$t_۲$	$a\times r=ar^۱$

۳	t_3	$a\times r\times r = ar^2$
۴	t_4	$a\times r\times r\times r = ar^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	$a\times \underbrace{r\times r\times \ldots \times r}_{\text{مرتبه } n-1} = ar^{n-1}$

دیدیم که:

جملهی n اُم یك دنبالهی هندسی (جملهی عمومی آن) که جمله اول آن a و قدر نسبت آن r است بهصورت $t_n = ar^{n-1}$ میباشد.

مثال

با توجه به تعریف ابتدایی، جملات یک دنبالهی هندسی که قدر نسبت آن $r = 2$ و جملهی اول آن $a = 3$ باشد، را تعیین کنید.

داریم:

$$a = 3$$

بنابراین در جای خالی اول عدد ۳ را میگذاریم.

$$\underset{t_1}{3}, \_\_, \_\_, \_\_$$

قدر نسبت این دنباله عدد $r = 2$ است. یعنی جملهی دوم، ۲ برابر جملهی اول است.

$$t_2 = 2\times 3 = 6$$

و به همین ترتیب داریم:

$$t_3 = 6\times 2 = 12$$
$$t_4 = 12\times 2 = 24$$

بنابراین:

$$\underset{t_1}{3}\quad \underset{t_2}{6}\quad \underset{t_3}{12}\quad \underset{t_4}{24}$$

در یک دنبالهی هندسی جملهی اول ۵ و قدر نسبت آن $r = 3$ است. جملهی عمومی آن را بهدست بیاورید.

اگر z، y و x سه جملهی متوالی از یک دنبالهی هندسی باشد، نشان دهید.

$$y^2 = x\times z$$

نکته

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد m واسطه‌ی هندسی درج کنیم، آن‌گاه

$$r^{m+1}=\frac{b}{a}$$

مثال

در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۲، بین دو عدد ۲ و ۱۶ چند واسطه‌ی هندسی می‌توانیم درج کنیم؟

$$2^{m+1}=\frac{2^4}{2}=2^3 \Rightarrow m+1=3 \Rightarrow m=2$$

مادربزرگ سارا در باغچه‌ی حیاط خود توت فرنگی پرورش می‌دهد. در سال اول او ۶ دانه کاشته است. در سال بعد، از توت فرنگی‌ها برداشت کرده و ۱۸ دانه کاشته است. او قصد دارد در سال آینده ۵۴ دانه بکارد.

الف) این اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند یا هندسی؟

ب) مادربزرگ سارا، ۸ سال بعد چند دانه خواهد کاشت؟

الف) جدول مربوط به اطلاعات این سوال را رسم می‌کنیم.

n: سال کاشت دانه	۱	۲	۳	۴
t_n: تعداد دانه‌هایی که در سال nام کاشته می‌شود.	۶	۱۸	۵۴	۱۶۲

می‌بینیم که هر جمله (به غیر از جمله‌ی اول) سه برابر جمله‌ی قبل از خودش است. بنابراین این اعداد تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

ب) هدف این سوال محاسبه‌ی t_8 است.

$$a=6\ ,\ r=3$$

$$t_n=ar^{n-1} \Rightarrow t_8=ar^7=6\times(3)^7=13122$$

فصل ۲

نسبت‌های مثلثاتی

لازم است بدانیم که مثلثات یکی از شاخه‌های ریاضیات است که روابط بین طول اضلاع و زاویه‌های مثلث را مطالعه می‌کند. نخستین کاربرد آن در مطالعات ستاره‌شناسی بوده است.

در این درس ابتدا شما را با مفاهیم ابتدایی تشابه دو مثلث آشنا می‌کنیم و سپس با استفاده از آن نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست می‌آوریم.

تشابه به معنی همانند بودن و به یکدیگر شبیه بودن است.

می‌دانیم نقشه هر مکانی با خود آن مکان متشابه است، یعنی در نقشه آن، همه ابعاد با نسبت ثابت و مشخصی کوچک شده‌اند و تناسب در آن رعایت شده است.

همچنین مهندسین ساختمان، محاسبات لازم برای یک مکان را روی ماکت آن انجام می‌دهند و پس از مشخص شدن جزئیات، اقدام به ساخت آن می‌کنند.

بنابراین می‌بینیم که تشابه در دنیای اطراف ما کاربرد زیادی دارد.

در سال‌های گذشته با مفهوم تشابه آشنا شدید.

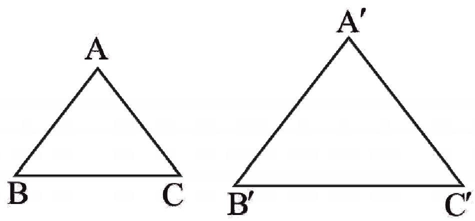
یادآوری

دو n ضلعی را در صورتی متشابه گوییم که:

۱- زاویه‌هایشان دو به دو مساوی باشند.

۲- اضلاعشان متناسب باشند، یعنی نسبت طول اضلاع متناظر، برابر باشند.

اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، می‌نویسیم: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$



و داریم:

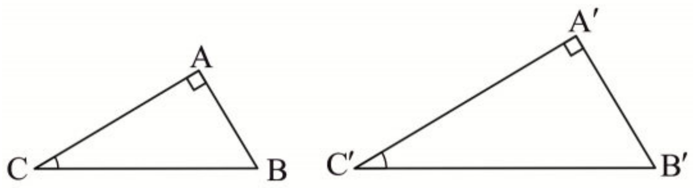
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \quad \text{و} \quad \hat{A}=\hat{A}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}'$$

در هندسه ثابت می‌شود:

هرگاه دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.

نتیجه

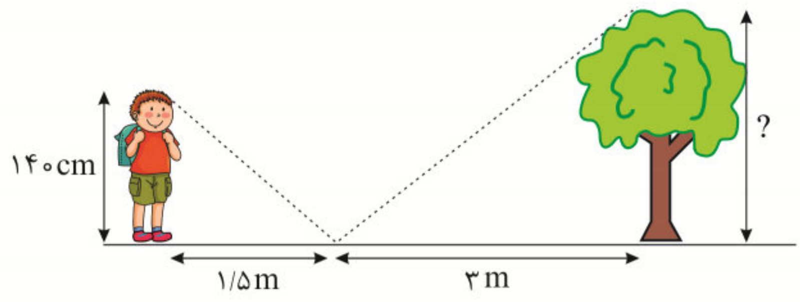
اگر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ (مانند شکل زیر)، داشته باشیم $\widehat{C}=\widehat{C'}$، آن‌گاه $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$.



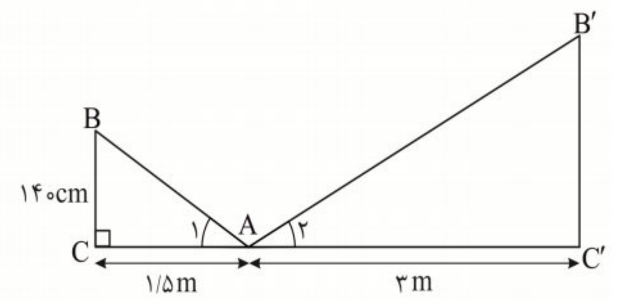
در مثال زیر با کاربرد تشابه در مسئله آشنا می‌شوید.

مثال

علی ۱۴۰ سانتی‌متر قد دارد. او یک آینه را روی زمین قرار می‌دهد و آن را به قدری جابه‌جا می‌کند تا بتواند بلندترین نقطه درخت را در آن ببیند. اگر فاصله علی از آینه ۱/۵ متر و فاصله درخت تا آینه ۳ متر باشد، بلندی درخت چقدر است؟ (به شکل زیر نگاه کنید).



پاسخ



زاویه‌های $\widehat{A}_۲=\widehat{A}_۱$ با هم برابرند (چرا؟)

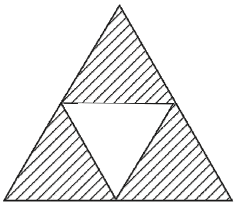
بنابراین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{AC'}\Rightarrow\frac{۱/۴}{B'C'}=\frac{۱/۵}{۳}\Rightarrow B'C'=۲/۸m$$

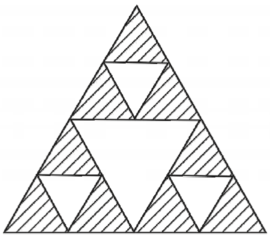
بنابراین ارتفاع درخت ۲۸۰ سانتی‌متر است.

زنگ تفریح

مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید. وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث متساوی‌الاضلاعی که در وسط پدید می‌آید را از آن حذف نمایید.

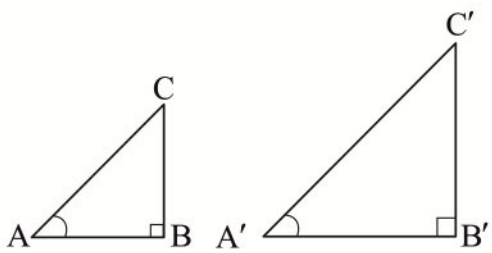


اکنون سه مثلث متساوی‌الاضلاع باقی‌مانده در شکل را در نظر بگیرید و وسط ضلع‌ها را در هر مثلث به هم وصل کرده و از درون هر یک، مثلث متساوی‌الاضلاعی که در وسط پدید می‌آید را حذف نمایید.



اگر این فرآیند را تا بی‌نهایت تکرار کنیم، شکل به دست آمده را مثلث سرپینسکی گوییم. مثلث های به وجود آمده همگی با یکدیگر متشابه‌اند.

می‌دانیم اگر دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ مانند شکل زیر متشابه باشند، داریم:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

آیا می‌توان این نسبت‌ها را به‌صورت زیر نوشت؟ (چرا؟)

(۱) $\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}$

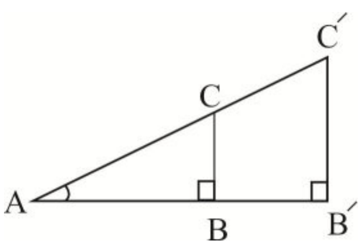
(۲) $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$

(۳) $\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$

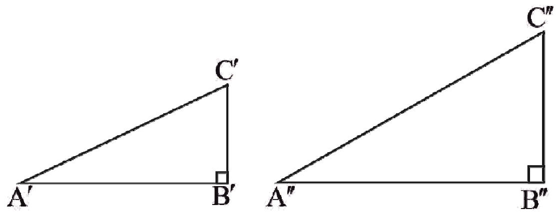
(۴) $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$

در ادامه از نسبت‌های بالا استفاده می‌شود، بنابراین به آن‌ها دقت کنید.

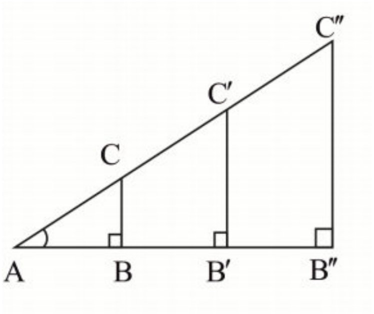
همان‌طور که گفته شد، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، در نتیجه زاویه‌های متناظر آن‌ها با هم برابرند و اضلاع متناظرشان، با یکدیگر متناسبند، بنابراین می‌توان آن‌ها را به‌صورت روبه‌رو نیز رسم کرد.



حال مثلث $A''B''C''$ را در نظر بگیرید که با $A'B'C'$ متشابه است.



باتوجه به توضیحاتی که داده شد، می‌توان شکل زیر را رسم کرد.



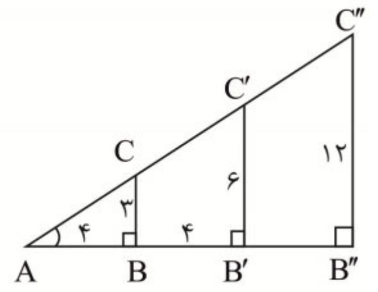
(*)

این روند را می‌توانیم به هر تعداد که بخواهیم ادامه دهیم و نسبت‌های زیر را داشته باشیم.

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots=\text{مقدار ثابت}$$

مثال (**)

در شکل زیر مثلث‌های ABC و $AB'C'$ و $AB''C''$ متشابه‌اند. باتوجه به اندازه‌های داده شده طول AB'' چقدر است؟



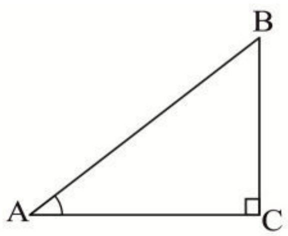
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B''C''}{AB''}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{AB''}\Rightarrow AB''=\frac{۱۲\times۴}{۳}=۱۶$$

از این مقدار ثابت می‌توان به یک مفهوم جالب رسید که در ریاضیات بسیار کاربرد دارد.

تعریف

در مثلث قائم‌الزاویه و دلخواه ABC، برای زاویه مشخص و حاده A نسبت طول ضلع مقابل به زاویه A به طول ضلع مجاور با آن، همواره مقداری ثابت است.

این مقدار ثابت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نمایش می‌دهیم.



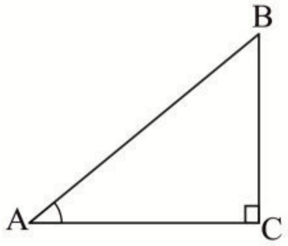
$$\tan A=\frac{BC}{AB}$$

در مثال (**) داریم:

$$\tan A = \frac{۳}{۴}$$

عکس زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AC}{BC}$$



در مثال(**) داریم:

$$\cot A = \frac{۴}{۳}$$

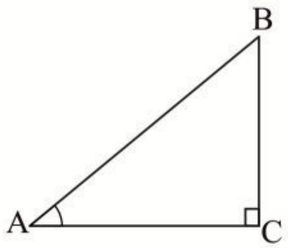
حال برای شکل(*) می‌توان نسبت‌های (۳) و (۴) را به تعداد دلخواه نوشت و این نسبت‌ها نیز همواره مقدار ثابتی هستند داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{B''C''}{A''C''} = \cdots = \text{مقدار ثابت}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A''B''}{A''C''} = \cdots = \text{مقدار ثابت}$$

تعریف

در مثلث قائم‌الزاویه و دلخواه ABC، برای زاویه مشخص و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل به زاویه A به طـول وتـر، همواره مقدار ثابتی است، این مقدار ثابت را سینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با $\sin A$ نمایش می‌دهیم.



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور به زاویه A به طول وتر را کسینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نمایش می‌دهیم.

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

در مثال(**) داریم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{۳}{۲۵}, \cos A = \frac{۴}{۲۵}$$

تا اینجا دیدیم که:

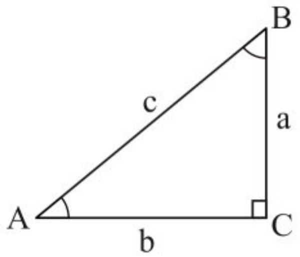
در یک مثلث قائم‌الزاویه، می‌توانیم بین اضلاع و زاویه‌ها رابطه‌ای داشته باشیم. در ریاضیات نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی گوییم.

در ادامه قصد داریم نسبت‌های مثلثاتی را برای چند زاویه حاده به دست آوریم.

مثال

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، فرض کنید $\widehat{A}=\widehat{B}=۴۵^\circ$ باشد، بنابراین $AC=AB$ است.

داریم:



$$a^۲+b^۲=c^۲\xrightarrow{a=b}۲a^۲=c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۲}a$$

$$\operatorname{Sin}A=\operatorname{Sin}۴۵^\circ=\frac{a}{\sqrt{۲}a}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

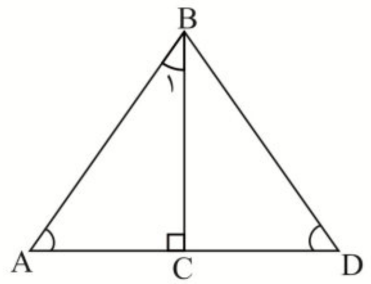
$$\operatorname{Cos}A=\operatorname{Cos}۴۵^\circ=\frac{b}{\sqrt{۲}a}=\frac{a}{\sqrt{۲}a}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan A=\tan ۴۵^\circ=\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=۱$$

$$\operatorname{Cot}A=\operatorname{Cot}۴۵^\circ=\frac{۱}{\tan A}=\frac{۱}{۱}=۱$$

همان طور که قبلاً گفتیم نسبت‌های مثلثاتی برای یک زاویه مشخص، مقادیر ثابتی هستند. بنابراین می‌توانید نسبت‌های به دست آمده در این مثال را برای زاویه ۴۵° به‌خاطر بسپارید.

مثال



در مثلث متساوی‌الاضلاع ABD ارتفاع BC را رسم می‌کنیم.

می‌دانیم $\widehat{A}=۶۰^\circ$ و $\widehat{B}_۱=۳۰^\circ$ است.

داریم:

$$AD=AB \quad , \quad AC=\frac{AD}{۲}\Rightarrow AC=\frac{AB}{۲}$$

$$(AB)^۲=(AC)^۲+(BC)^۲\Rightarrow (BC)^۲=(AB)^۲-(\frac{AB}{۲})^۲=\frac{۳(AB)^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\text{Sin}\,۶۰^\circ=\text{Cos}\,۳۰^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

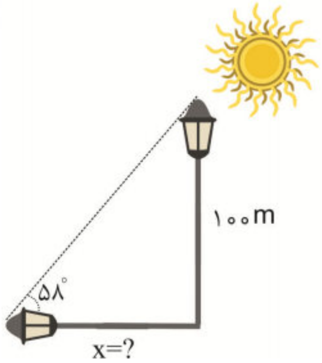
$$\text{Sin}\,۳۰^\circ=\text{Cos}\,۶۰^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{۱}{۲}AB}{AB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ=\text{Cot}\,۶۰^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{۱}{۲}AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan ۶۰^\circ=\text{Cot}\,۳۰^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}{\frac{۱}{۲}AB}=\sqrt{۳}$$

توصیه می‌شود مقادیر به‌دست آمده را به خاطر بسپارید.

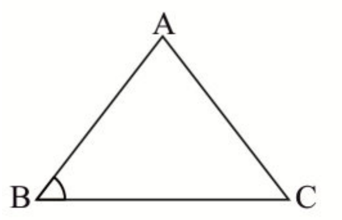
فرض کنید یک تیر چراغ برق ۱۰ متر بلندی داشته باشد. طول تقریبی سایه آن را هنگامی که زاویه تابش اشعه‌های خورشید با زمین ۵۸° درجه باشد، محاسبه کنید. $(\tan ۵۸^\circ \simeq ۱/۶۰۰۳)$



فرض کنید طول یک سطح شیب‌دار $50m$ و زاویه آن با زمین 30° باشد. اگر شما تا بالاترین نقطه این سطح شیب‌دار بالا بروید، ارتفاع شما تا زمین چقدر است؟

نکته

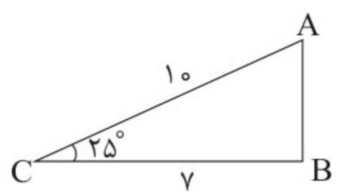
در هر مثلث دلخواه ABC، با معلوم بودن اندازه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها می‌توان مساحت مثلث را با رابطه‌زیرمحاسبه‌کرد:



$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

مثال

مساحت مثلث زیر را پیدا کنید. $(\sin 25 \simeq 0/42)$

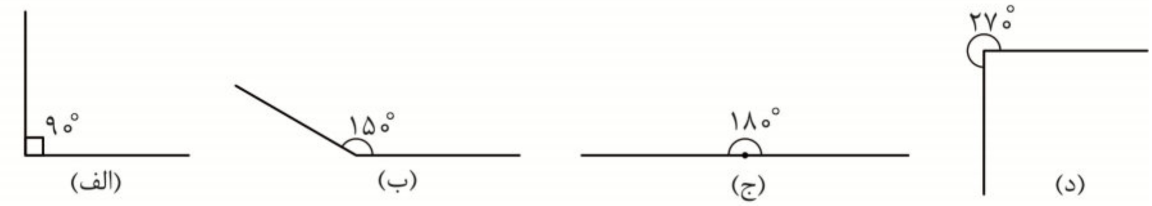


پاسخ

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2} \times 10 \times 7 \times \sin 25^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 7 \times 0/42 = 14/7$$

دایره‌مثلثاتی

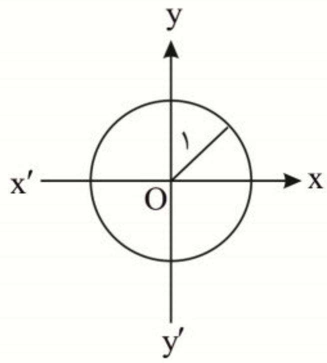
در درس گذشته، با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، توانستیم نسبت‌های مثلثاتی را برای یک زاویه حاده و مشخص محاسبه کنیم. آیا با استفاده از اطلاعات درس قبل می‌توانید نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای زیر به دست آورید؟



همان طور که مشاهده می‌کنید مثلث قائم‌الزاویه به تنهایی برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی کافی نیست و لازم است از ابزار دیگری هم استفاده کنیم که دارای جهت و اندازه باشد. آیا برای این کار ابزاری سراغ دارید؟

در این درس قصد داریم ابزاری به نام دایره مثلثاتی را به شما معرفی کنیم.

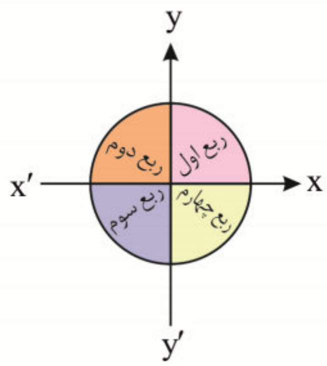
دستگاه مختصات را در نظر بگیرید. دایره‌ای به شعاع واحد (۱) و مرکز مبدأ مختصات روی آن رسم می‌کنیم و آن را دایره مثلثاتی می‌نامیم.



در ادامه خصوصیات دایره مثلثاتی را بررسی می‌کنیم.

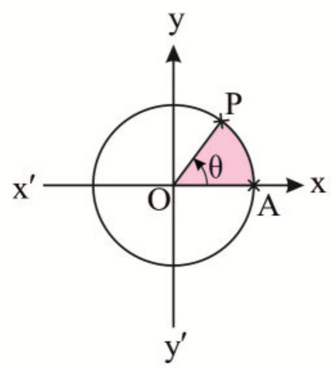
همان‌طور که مشاهده می‌کنید این دایره به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. هر کدام از این قسمت‌ها یک ناحیه مثلثاتی ($\frac{۱}{۴}$ دایره مثلثاتی) هستند و لازم است آن‌ها را از یکدیگر متمایز کنیم. (چرا؟)

این ناحیه‌های مثلثاتی را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



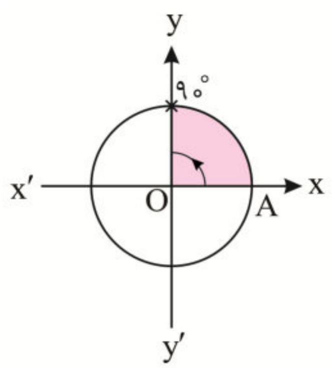
حال باید بتوانیم زاویه مورد نظر خود را روی این دایره مشخص کنیم.

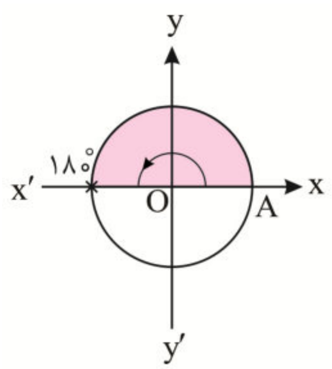
ابتدا نقطه A را به عنوان مبدأ حرکت در نظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم اگر نقطه P روی دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه $AOP\ (\theta)$ مثبت و اگر در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند این زاویه منفی است.

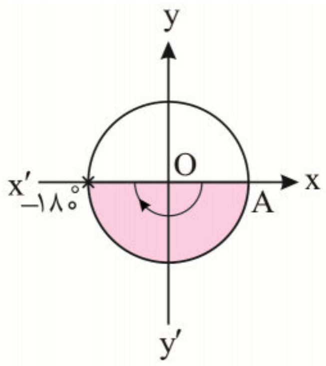


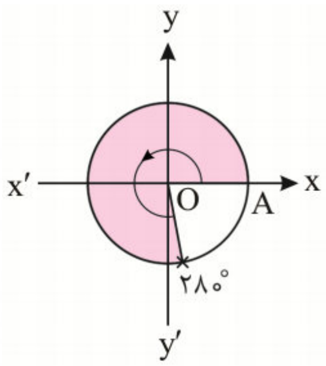
مثال

زاویه‌های °۹۰، °۱۸۰، °۱۸۰−، °۲۸۰ و °۳۰− روی دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند.

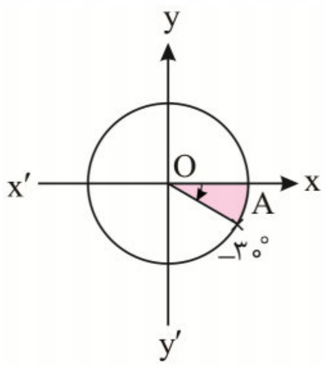








این زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.



این زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

نکته

زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زوایای مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ یک از ناحیه‌های مثلثاتی در نظر نمی‌گیریم.

باتوجه به آنچه در مورد ناحیه‌های مثلثاتی گفتیم، داریم:

اگر $۰^\circ<\theta<۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه θ در ربع اول است.

اگر $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$ باشد، آن‌گاه θ در ربع دوم است.

اگر $۱۸۰^\circ<\theta<۲۷۰^\circ$ باشد، آن‌گاه θ در ربع سوم است.

اگر $۲۷۰^\circ<\theta<۳۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه θ در ربع چهارم است.

مثال

در هر کدام از ناحیه‌های مثلثاتی، دو زاویه مشخص کنید.

پاسخ

$۳۰^\circ , ۶۸^\circ$: در ربع اول

$۹۷^\circ , ۱۷۵^\circ$: در ربع دوم

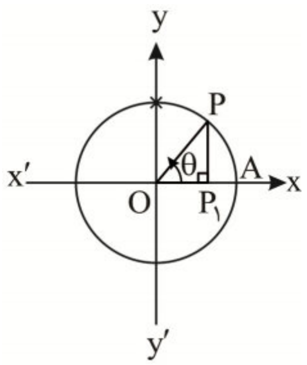
$۱۹۰^\circ , ۲۶۸^\circ$: در ربع سوم

$۲۹۰^\circ , ۳۵۶^\circ$: در ربع چهارم

حال فرض کنید P نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی در ربع اول باشد و θ زاویه حاده‌ای بین پاره خط OP و محور x باشد. همچنین فرض کنید $P_۱$ پای خط عمودی باشد که از نقطه P روی محور x رسم شده است. در مثلث قائم‌الزاویه $OPP_۱$، داریم:

$$OP = ۱ , PP_۱ = \sin\theta \quad , \quad OP_۱ = \cos\theta$$

بنابراین $P = (\cos\theta , \sin\theta)$، از طرفی P نمایش نقطه دلخواه (x, y) است. در نتیجه:



$$x = \cos\theta \; , \; y = \sin\theta \qquad (۱)$$

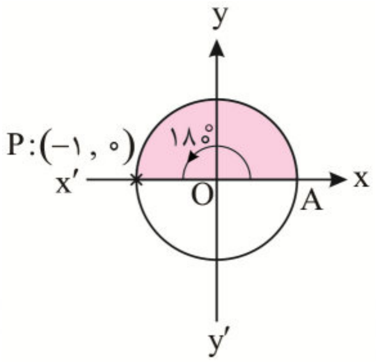
دو رابطه به دست آمده، در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه دلخواه استفاده می‌شوند. لازم است بدانیم که در دایره مثلثاتی علاوه بر مقدار، جهت (مثبت یا منفی بودن) نیز در نظر گرفته می‌شود. (علامت x و y مهم است و لحاظ می‌شود)

مثال

حال باتوجه به مطالب گفته شده، $\sin ۱۸۰^\circ$، $\cos ۱۸۰^\circ$ و $\tan ۲۷۰^\circ$ را حساب می‌کنیم.

برای به‌دست آوردن $\sin ۱۸۰^\circ$، ابتدا زاویه ۱۸۰° را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

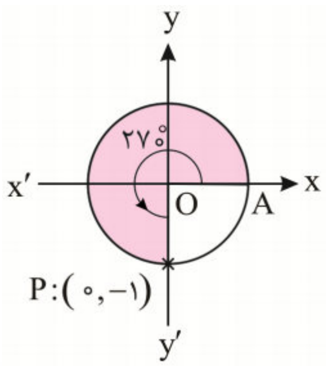
همان طور که مشاهده می‌کنید، برای زاویه ۱۸۰°، مختصات نقطه‌ی P، $(-۱,۰)$ است.



بنابراین طبق رابطه (۱) داریم:

$$\sin ۱۸۰^\circ = y = ۰ \quad , \quad \cos ۱۸۰^\circ = x = -۱$$

برای محاسبه $\tan ۲۷۰^\circ$ نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.



می‌دانیم $\tan ۲۷۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sin ۲۷۰^\circ}{\cos ۲۷۰^\circ}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos ۲۷۰^\circ = ۰ \\ y = \sin ۲۷۰^\circ = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \tan ۲۷۰^\circ = \frac{-۱}{۰} \quad \text{تعریف نشده}$$

مثال

جدول زیر را کامل کنید.

مقدار	°۰	°۹۰	°۱۸۰	°۲۷۰	°۳۶۰
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					

پاسخ

مقدار	°۰	°۹۰	°۱۸۰	°۲۷۰	°۳۶۰
$\sin\theta$	۰	۱	۰	۱-	۰
$\cos\theta$	۱	۰	۱-	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

لازم است که نسبت‌های مثلثاتی جدول بالا را به خاطر بسپارید.

تا اینجا توانستیم نسبت‌های مثلثاتی را روی ناحیه‌های مرزی دایره مثلثاتی محاسبه کنیم.

یکی دیگر از نکاتی که در حل مسائل به ما کمک می‌کند، این است که بتوانیم علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را در ناحیه‌های مثلثاتی تشخیص دهیم.

مثال

علامت نسبت‌های مثلثاتی را در هر یک از ناحیه‌های مشخص شده بنویسید.

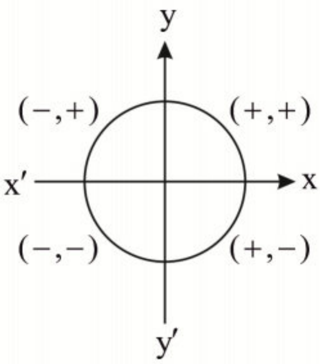
مقدار	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				
$\cot\theta$				

پاسخ

ابتدا علامت‌های x و y را در ناحیه‌های مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

مقدار	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

$\Rightarrow$



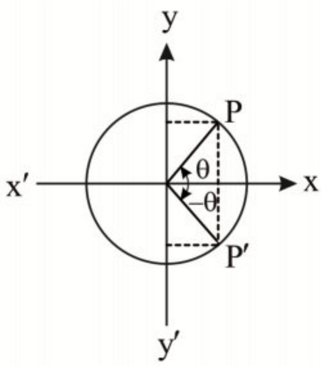
نکته

برای هر زاویه دلخواه θ داریم:

$$-۱\le\cos\theta\le ۱\ ,\ \ -۱\le\sin\theta\le ۱$$

مثال

دو زاویه θ و $-\theta$ مشخص شده در شکل را در نظر بگیرید.



انتهای این دو زاویه، دایره مثلثاتی را در نقاط P و P' قطع می‌کنند.

اگر مختصات نقطه P را (x,y) در نظر بگیریم، مختصات نقطه P' به صورت $(x,-y)$ است.

بنابراین داریم:

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{۱}=x$$

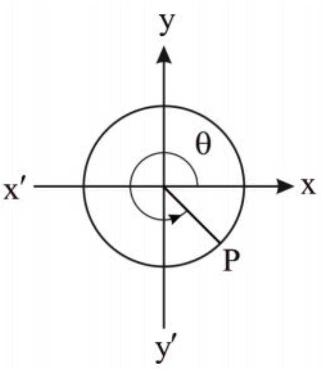
$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{۱}=-y$$

$$P':(x,-y)=(\cos(-\theta),\sin(-\theta))$$
$$P:\ (x,y)\ =(\cos\theta,\sin\theta)$$

می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\cos(-\theta)=\cos\theta\ ,\ \sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$
$$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

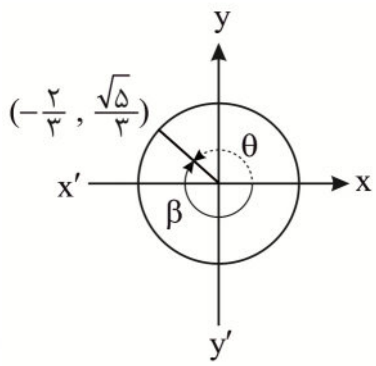
اگر در شکل زیر، طول نقطه P عدد $\frac{۲}{۵}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را بنویسید.
(توجه کنید نقطه‌ی P روی دایره مثلثاتی است)



نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۹۵° را برحسب زاویه ۱۵° محاسبه کنید.

مثال

باتوجه به آن‌چه که در شکل می‌بینید، نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه θ به‌دست آورید.



پاسخ

می‌بینیم که

$$(-\frac{۲}{۳})^۲+(\frac{\sqrt{۵}}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۹}=۱$$

بنابراین این نقطه روی دایره واحد قرار دارد.

در نتیجه داریم:

$$\cos\theta=x=-\frac{۲}{۳}$$

$$\sin\theta=y=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{-\frac{۲}{۳}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{\tan\theta}=-\frac{۱}{\frac{\sqrt{۵}}{۲}}=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}=-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

در همین مثال، به نظر شما آیا روابط زیر برقرارند؟ (چرا؟)

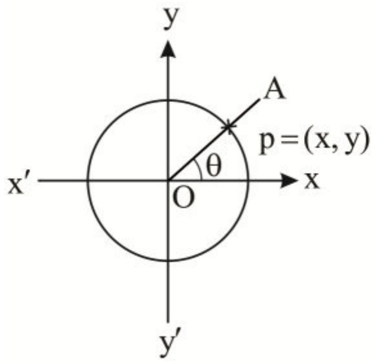
$$\cos\theta=\cos\beta$$
$$\sin\theta=\sin\beta$$
$$\tan\theta=\tan\beta$$
$$\cot\theta=\cot\beta$$

رابطه‌شیب‌خط با تانژانت‌زاویه

در این قسمت از درس قصد داریم رابطه بین شیب خط و تانژانت را بیابیم.

به مثال زیر توجه کنید.

فرض کنیم OA خطی در ربع اول باشد، همان طور که مشاهده می‌کنید مختصات دو نقطه از این خط را داریم. $\{p,o\}$ بنابراین:



$$\text{شیب خط} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

در نتیجه

$$\text{شیب خط} = \tan\theta$$

نکته

شیب خط در هر نقطه برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور افقی (محور x ها) می‌سازد.

$$m = \tan\theta$$

مثال

معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1,2)$ می‌گذرد و زاویه آن با محور x ها 45° است.

پاسخ

داریم:

$$y = \tan 45^\circ x + b \Rightarrow y = x + b$$

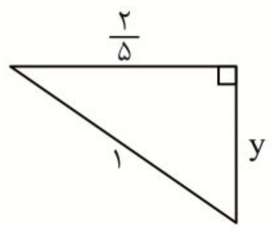
نقطه $(2,1)$ در این معادله خط صدق می‌کند. در نتیجه:

$$2 = 1 + b \Rightarrow b = 1$$

معادله این خط به‌صورت زیر است:

$$y = x + 1$$

همان‌طور که تاکنون دیدیم، برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ، لازم است که مقدار x و y را داشته باشیم.



باتوجه به مثلث قائم‌الزاویه مشخص شده داریم:

$$(\frac{۲}{۵})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۱}{۲۵}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

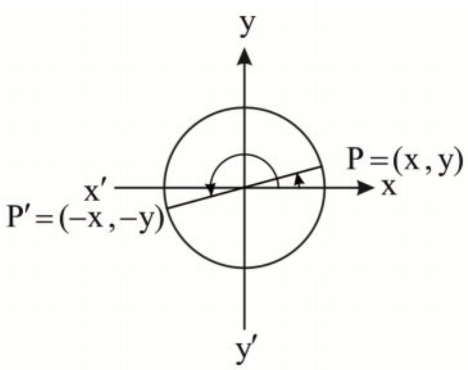
θ در ربع چهارم است، پس مقدار y منفی است.

$$x = \frac{۲}{۵}, y = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

$$\cos\theta = x = \frac{۲}{۵}\ , \sin\theta = y = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}}{\frac{۲}{۵}} = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{۲}{۵}}{-\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}} = -\frac{۲}{\sqrt{۲۱}} = \frac{-۲\sqrt{۲۱}}{۲۱}$$

ابتدا زاویه 195° و 15° را مشخص می‌کنیم. مانند گذشته دو نقطه P و P' را روی دایره مثلثاتی نام‌گذاری می‌کنیم. اگر مختصات نقطه P برابر با (x,y) باشد، مختصات نقطه P' بـــرابر بـــا $(-x,-y)$ است.



$$P:(x,y)=\left(\cos 15^\circ,\sin 15^\circ\right)$$

$$P':(-x,-y)=\left(\cos 195^\circ,\sin 195^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \cos 195^\circ=-\cos 15^\circ\ ,\ \sin 195^\circ=-\sin 15^\circ$$

$$\tan 195^\circ=\frac{\sin 195^\circ}{\cos 195^\circ}=\frac{-\sin 15^\circ}{-\cos 15^\circ}=\tan 15^\circ$$

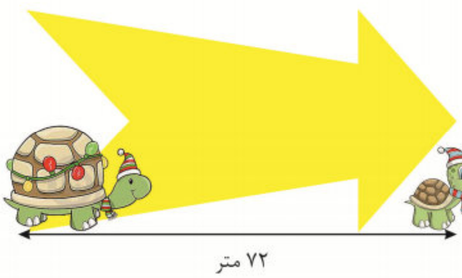
$$\cot 195^\circ=\frac{\cos 195^\circ}{\sin 195^\circ}=\frac{-\cos 15^\circ}{-\sin 15^\circ}=\cot 15^\circ$$

فصل ۳

ریشه و توان عددهای حقیقی

مثال

مثال‌های زیر را با دقت بخوانید و در مورد جواب آن‌ها فکر کنید.



لاک‌پشت مادر و لاک‌پشت بچه به فاصله‌ی ۷۲ متری از یکدیگر قرار دارند. لاک‌پشت مادر در هر ساعت $\sqrt{۳۷}$ متر به سمت راست حرکت می‌کند و لاک‌پشت بچه نیز، در هر ساعت $\sqrt{۱۰}$ متر به سمت راست می‌رود. آن‌ها هم‌زمان شروع به حرکت می‌کنند، این مادر و فرزند پس از چند ساعت به یکدیگر می‌رسند؟

توپی را از ارتفاع ۱۰۰ متری رها کرده‌ایم. توپ در هر بار که به زمین برخورد می‌کند تا $\frac{۲\sqrt{۲}}{۷}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. ارتفاع توپ پس از دو برخورد با زمین چقدر است؟

یک تاس را چهار بار می‌اندازیم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۵ باشد را به دست آورید.

همان‌طور که مشاهده کردید، ریشه و توان دو مفهوم کاربردی در ریاضیات هستند و در واقع از آن‌ها به عنوان یک ابزار در حل مسئله‌های ریاضی استفاده می‌شود. در سال‌های گذشته با این دو مفهوم آشنا شدید. در این فصل قصد داریم اطلاعات شما را در این زمینه کامل‌تر کنیم. خوب است ابتدا مروری بر مطالب گفته شده در سال‌های گذشته داشته باشیم.

(حداقل به چند مورد از سوال‌های زیر جواب بدهید.)

باتوجه به دانسته‌های خود پاسخ دهید.

۱) $۲^{۵}$

۲) $۲\times ۴^{۳}+۵\times ۲^{۳}$

۳) $(-۹)^{۳}$

۴) $\dfrac{a\times a\times a\times a}{b\times b}$

۵) $(۳\times ۲)^{۲}$

۶) $(\dfrac{۱}{۲})^{۲}+(\dfrac{۱}{۲})^{۳}$

۷) $(\dfrac{۳}{۲})^{۲}-۲(\dfrac{۱}{۳})^{۲}$

۸) $۳^{۲}\times ۳^{۳}$

۹) $(-۴^{۲})^{۳}$

۱۰) $(ab^{۳})^{۳}$

۱۱) $(-۲^{۳})^{۴}\times(-۲)^{۲}$

۱۲) $(-\dfrac{۲}{۳})^{۳}\times(-\dfrac{۲}{۳})^{۳}$

۱۳) $(\dfrac{۳}{۲})^{۱۲}\div(\dfrac{۳}{۲})^{۵}$

۱۴) $(-۸)^{۵}\div(-۴)^{۵}$

۱۵) $۲^{-۳}$

۱۶) $(\dfrac{۳}{۴})^{-۲}$

۱۷) $\dfrac{a^{۳}\times b\times z^{۴}}{a^{-۱}\times b^{۶}\times z^{۲}}$

۱۸) $۲^{-۱}\times ۳^{-۲}$

۱۹) $a^{-۲}+(\dfrac{۱}{a})^{۲}$

۲۰) $(\dfrac{۱}{۲})^{۰}+۳^{۰}$

نکته

یکی از نکاتی که در به‌دست آوردن ریشه‌های دوم و سوم به ما کمک می‌کند این است که بتوانیم عدد را طوری تجزیه کنیم که به‌ترتیب توان‌های ۲ و ۳ در آن ظاهر شوند (در صورت امکان).

باتوجه به مطالبی که در مورد ریشه و رادیکال بیان شد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱) $\sqrt{۱۶}$

۲) $-\sqrt{۱۶}$

۳) $\sqrt{\dfrac{۱}{۹}}$

۴) $-\sqrt{\dfrac{۱}{۹}}$

۵) $\sqrt{-۲۵}$

۶) ریشه‌ی دوم عدد ۲۵

۷) مجذور عدد ۱۱

۸) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۹}$

$۹)\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}$

$۱۰)\sqrt{\frac{۱۲۱}{۲۵}}$

$۱۱)\sqrt{\frac{۴۹\times ۳۶}{۶۴}}$

$۱۲)(\sqrt{۶})^{۲}$

۱۳) ریشه‌ی دوم عدد ۳

۱۴) ریشه‌ی دوم عدد ۹−

$۱۵)\sqrt[۳]{-۲۷}$

$۱۶)\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۶۴}}$

$۱۷)(\sqrt[۳]{۷})^{۳}$

$۱۸)\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۱۶}$

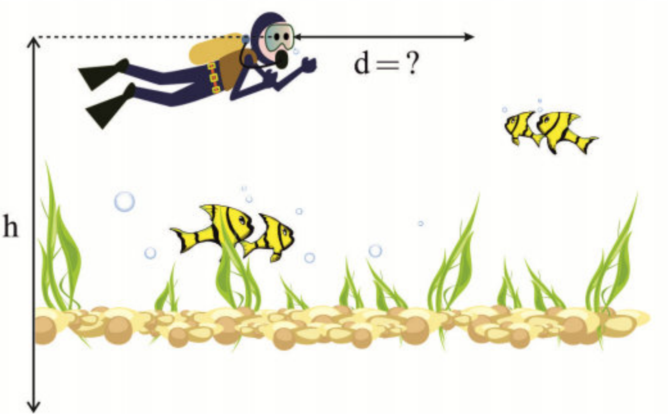
$۱۹)\sqrt[۳]{\frac{۸}{۱۲۵}}$

$۲۰)\frac{\sqrt[۳]{-۱۹۲}}{\sqrt[۳]{۳}}$

۲۱) ریشه‌ی سوم عدد ۵−

$۲۲)\sqrt[۳]{-۷۲۹}\times\sqrt{۳۶}$

به مثال زیر توجه کنید:



فرض کنید چشم‌های یک غواص در ارتفاع h متری از کف دریا قرار داشته باشد و او بتواند d متری افقی خود را ببیند، اگر $d=۳/۵۷\sqrt[۳]{h^{۲}+۱}$ باشد، با فرض این‌که فاصله‌ی چشم‌های این شخص از کف دریا ۵ متر باشد، فاصله‌ی دید افقی این شخص (d) را محاسبه کنید.

جواب این سوال به‌صورت زیر است:

$$d=۳/۵۷\times\sqrt[۳]{h^{۲}+۱}\ \underline{\underline{h=۵}}\ ۳/۵۷\times\sqrt[۳]{۲۶}$$

بنابراین لازم است که مقدار $\sqrt[۳]{۲۶}$ رابه‌دست آوریم. از طرفی می‌دانیم:

$$\sqrt[۳]{۲۷}=\sqrt[۳]{۳^{۳}}=۳$$

چون عدد ۲۶ به ۲۷ خیلی نزدیک است، حدس می‌زنیم ریشه‌ی سوم ۲۶، عدد ۲/۷ (یک عدد نزدیک به ۳) باشد.

برای این‌که حدس خود را آزمایش کنیم، مقدار $(۲/۷)^{۳}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(۲/۷)^{۳}=۲/۷\times ۲/۷\times ۲/۷=۱۹/۶۸۳$$

عدد به‌دست آمده نتیجه‌ی مطلوبی نبود.

واضح است عددی که حدس می‌زنیم باید کمتر از ۳ باشد، بنابراین عدد ۲/۸ را امتحان می‌کنیم.

داریم:

$$(۲/۸)^{۳} = ۲۱/۹۵۲$$

وضعیت بهتر شد، اما کاملا مطلوب نیست، عدد ۲/۹ را امتحان می‌کنیم:

$$(۲/۹)^{۳} = (۲/۹)^{۲} \times ۲/۹ = ۲۴/۳۸۹ \simeq ۲۴/۴$$

این عدد با تقریب کمتر از ۰/۱ تا حد خوبی به ۲۶ نزدیک است.

اگر بخواهیم تا تقریبی کمتر از ۰/۰۱ جلو برویم، می‌توانیم عدد دقیق‌تری را به‌دست بیاوریم.

عدد ۲/۹۶ را امتحان می‌کنیم.

$$(۲/۹۶)^{۳} = (۲/۹۶)^{۲} \times ۲/۹۶ = ۲۵/۹۳۴۳۳۶$$

این عدد بسیار به خواسته‌ی ما نزدیک است.

بنابراین:

$$\sqrt[۳]{۲۶} \simeq ۲/۹۶$$

نکته

اگر ماشین‌حساب خوبی داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۲۶}$ را تا چندین رقم اعشاری به‌دست آورید، اما هیچ‌گاه نمی‌توانید مقدار دقیق آن را به‌صورت اعشاری به دست بیاورید. در این‌صورت تنها می‌توانید رقم‌های اعشار بیشتری ببینید!

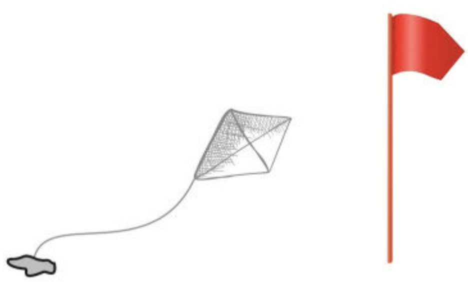
باتوجه به این‌که همواره در ریاضی سعی می‌شود، خطا به کمترین مقدار ممکن برسد، برای نمایش این عدد از $\sqrt[۳]{۲۶}$ استفاده می‌کنیم، اما در عمل و در زندگی واقعی مقدار تقریبی آن را لازم داریم. بنابراین باید بتوانیم مقدار تقریبی را به‌دست بیاوریم.

درنتیجه پاسخ این سوال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$d = ۳/۵۷ \times \sqrt[۳]{۲۶} \simeq ۳/۵۷ \times ۲/۹۶ = ۱۰/۵۶۷۲$$

این غواص می‌تواند تقریبا تا ۱۰/۵ متری افقی را ببیند.

فرض کنید یک بادبادک کاغذی با نخ به زمین بسته شده است. هنگامی که نسیم می‌وزد، بادبادک در راستای میله‌ی پرچم بالا می‌رود. اگر فاصله‌ی میله‌ی پرچم با آن نقطه از زمین که بادبادک بسته شده است ۳ متر و طول نخ بادبادک ۱۱ متر باشد، ارتفاع بادبادک از زمین چقدر است؟



نکته

خوب است مربع اعداد زیر را به خاطر بسپاریم، زیرا در طول حل مسائل از آن‌ها استفاده‌ی زیادی می‌شود.

$۱۷^{۲}=۲۸۹$	$۱۴^{۲}=۱۹۶$	$۱۱^{۲}=۱۲۱$
$۱۸^{۲}=۳۲۴$	$۱۵^{۲}=۲۲۵$	$۱۲^{۲}=۱۴۴$
$۱۹^{۲}=۳۶۱$	$۱۶^{۲}=۲۵۶$	$۱۳^{۲}=۱۶۹$

مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه و روی محور اعداد، مشخص کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۸}$

۲) $\sqrt{۲۳}$

۳) $\sqrt[۳]{۶}$

۴) $-\sqrt[۳]{۱}$

۵) $\sqrt[۳]{-۶۴}$

۶) $\sqrt{۳۲۴}$

معرفی ریشه‌های چهارم و پنجم

ریشه‌های چهارم یک عدد مثبت، به اعدادی گفته می‌شود که وقتی به توان چهار می‌رسند برابر با آن عدد شوند.
به طور مشابه ریشه‌ی پنجم یک عدد، به عددی می‌گویند که وقتی به توان پنج برسد، مساوی آن عدد شود.

مثال

چون $۸۱ = (-۳)^۴ = (۳)^۴$ بنابراین ± ۳ ریشه‌های چهارم ۸۱ هستند.

باتوجه به این‌که $۳۲ = ۲^۵$ می‌شود. بنابراین $\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$.

نکته

اگر بخواهیم رادیکال عدد مثبت a را با فرجه چهارم به‌دست بیاوریم، حاصل فقط یک مقدار مثبت خواهد بود، اما اگر قصد داشته باشیم ریشه‌ها را به‌دست بیاوریم، دو جواب مثبت و منفی به‌دست می‌آید.

حاصل $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$ چه عددی است؟

پاسخ

$$\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = |-۲| = ۲$$

اگر (-۴) ریشه‌ی پنجم a باشد، a چه عددی است؟

پاسخ

(-۴) ریشه‌ی پنجم a است. یعنی $a = (-۴)^۵$، بنابراین:

$$a = -۱۰۲۴$$

۵ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\dfrac{\sqrt[۵]{-۳۲}}{\sqrt[۴]{۸۱}}$

۲) $۳ \times \sqrt[۵]{۳۱۲۵} + ۷\sqrt[۴]{۱۲۹۶}$

۳) $\sqrt[۵]{a^{۱۰}b^{۷}c^{-۶}}$

۴) $\sqrt[۵]{۷۲}$

۵) $\sqrt[۵]{\dfrac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}}$

۶) $\sqrt[۵]{۰/۰۰۲۴۳}$

۷) $\sqrt[۴]{۱۲۰۰۰۰}$

پاسخ مثال

$۱)\ ۲^{۵}=۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۳۲$

$۲)\ ۲\times۴^{۳}+۵\times۲^{۳}=۲\times(۴\times۴\times۴)+۵\times(۲\times۲\times۲)=۲\times۶۴+۵\times۸=۱۲۸+۴۰=۱۶۸$

$۳)\ (-۹)^{۳}=(-۹)\times(-۹)\times(-۹)=-۷۲۹$

$۴)\ \dfrac{a\times a\times a\times a}{b\times b}=\dfrac{a^{۴}}{b^{۲}}$

$۵)\ (۳\times۲)^{۲}=۶^{۲}=۳۶$

$۶)\ (\dfrac{۱}{۲})^{۲}+(\dfrac{۱}{۲})^{۳}=\dfrac{(۱)^{۲}}{۲^{۲}}+\dfrac{(۱)^{۳}}{۲^{۳}}=\dfrac{۱}{۴}+\dfrac{۱}{۸}=\dfrac{۲+۱}{۸}=\dfrac{۳}{۸}$

$۷)\ (\dfrac{۳}{۲})^{۲}-۲(\dfrac{۱}{۳})^{۲}=\dfrac{۳^{۲}}{۲^{۲}}-۲\times\dfrac{۱}{۳^{۲}}=\dfrac{۹}{۴}-\dfrac{۲}{۹}=\dfrac{۸۱-۸}{۳۶}=\dfrac{۷۳}{۳۶}$

$۸)\ ۳^{۲}\times۳^{۳}=۳^{۲+۳}=۳^{۵}$

$۹)\ (-۴^{۲})^{۳}=(-۴)^{۶}=(-۱\times۴)^{۶}=(-۱)^{۶}\times۴^{۶}=۱\times۴^{۶}=(۲^{۲})^{۶}=۲^{۱۲}=۴۰۹۶$

$۱۰)\ (ab^{۳})^{۳}=a^{۳}(b^{۳})^{۳}=a^{۳}b^{۹}$

$۱۱)\ (-۲^{۳})^{۴}\times(-۲)^{۲}=(-۲)^{۱۲}\times(-۲)^{۲}=(-۲)^{۱۴}=(-۱)^{۱۴}\times۲^{۱۴}=۲^{۱۴}=۱۶۳۸۴$

$۱۲)\ (-\dfrac{۲}{۳})^{۳}\times(-\dfrac{۲}{۳})^{۳}=(-\dfrac{۲}{۳})^{۳+۳}=(-\dfrac{۲}{۳})^{۶}=(-۱)^{۶}\times(\dfrac{۲}{۳})^{۶}=۱\times(\dfrac{۲}{۳})^{۶}=\dfrac{۲^{۶}}{۳^{۶}}=\dfrac{۶۴}{۷۲۹}$

$۱۳)\ (\dfrac{۳}{۲})^{۱۲}\div(\dfrac{۳}{۲})^{۵}=(\dfrac{۳}{۲})^{۱۲-۵}=(\dfrac{۳}{۲})^{۷}=\dfrac{۳^{۷}}{۲^{۷}}=\dfrac{۲۱۸۷}{۱۲۸}$

$۱۴)\ (-۸)^{۵}\div(-۴)^{۵}=(\dfrac{-۸}{-۴})^{۵}=۲^{۵}=۳۲$

$۱۵)\ ۲^{-۳}=(\dfrac{۱}{۲})^{۳}=\dfrac{(۱)^{۳}}{۲^{۳}}=\dfrac{۱}{۸}$

$۱۶)\ (\dfrac{۳}{۴})^{-۲}=\dfrac{۱}{(\dfrac{۳}{۴})^{۲}}=\dfrac{۱}{\dfrac{۹}{۱۶}}=\dfrac{۱۶}{۱۹}$

$۱۷)\ \dfrac{a^{۳}\times b\times z^{۴}}{a^{-۱}\times b^{۶}\times z^{۲}}=a^{۳-(-۱)}\ b^{۱-۶}\ z^{۴-۲}=a^{۴}b^{-۵}z^{۲}=a^{۴}\dfrac{۱}{b^{۵}}\times z^{۲}=\dfrac{a^{۴}\times z^{۲}}{b^{۵}}$

$۱۸)\ ۲^{-۱}\times۳^{-۲}=\dfrac{۱}{۲}\times(\dfrac{۱}{۳})^{۲}=\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{۱}{۹}=\dfrac{۱}{۱۸}$

$۱۹)\ a^{-۲}+(\dfrac{۱}{a})^{۲}=(\dfrac{۱}{a})^{۲}+(\dfrac{۱}{a})^{۲}=۲\times(\dfrac{۱}{a})^{۲}=\dfrac{۲}{a^{۲}}$

$۲۰)\ (\dfrac{۱}{۲})^{۰}+۳^{۰}=۱+۱=۲$

۱) $\sqrt{۱۶}=\sqrt{۴^۲}=۴$

۲) $-\sqrt{۱۶}=-\sqrt{۴^۲}=-۴$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۹}}=\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{۱}{۳}$

۴) $-\sqrt{\frac{۱}{۹}}=-\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲}=-\frac{۱}{۳}$

۵) $\sqrt{-۲۵}=?$ (اعداد منفی جذر ندارند.)

۶) ریشه‌ی دوم عدد ۲۵، یعنی اعدادی که اگر به توان ۲ برسند، برابر با ۲۵ می‌شوند. یعنی ۵ و ۵−.

$(۵^۲=۲۵\ ,\ (-۵)^۲=۲۵)$

۷) مجذور عدد ۱۱ یعنی $۱۲۱=۱۱^۲$

۸) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۹}=\sqrt{۳}\times۳=۳\sqrt{۳}$

۹) $\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷$

۱۰) $\sqrt{\frac{۱۲۱}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۱۲۱}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۱}{۵}$

۱۱) $\sqrt{\frac{۴۹\times۳۶}{۶۴}}=\frac{\sqrt{۴۹}\times\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۶۴}}=\frac{۷\times۶}{۸}=\frac{۷\times۳}{۴}=\frac{۲۱}{۴}$

۱۲) $(\sqrt{۶})^۲=۶$

۱۳) ریشه‌ی دوم عدد ۳، اعداد $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ است. زیرا $۳=(\sqrt{۳})^۲$ و $۳=(-\sqrt{۳})^۲$.

۱۴) اعداد منفی ریشه ندارند.

۱۵) $\sqrt[۳]{-۲۷}=\sqrt[۳]{(-۳)^۳}=-۳$

۱۶) $\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۶۴}}=\sqrt[۳]{(-\frac{۱}{۴})^۳}=-\frac{۱}{۴}$

۱۷) $(\sqrt[۳]{۷})^۳=۷$

۱۸) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۴\times۴}=\sqrt[۳]{(۴)^۳}=۴$

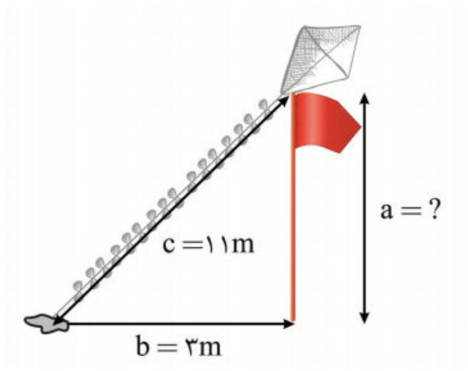
۱۹) $\sqrt[۳]{\frac{۸}{۱۲۵}}=\sqrt[۳]{\frac{۲^۳}{۵^۳}}=\sqrt[۳]{(\frac{۲}{۵})^۳}=\frac{۲}{۵}$

۲۰) $\frac{\sqrt[۳]{-۱۹۲}}{\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{-۱۹۲}{۳}}=\sqrt[۳]{-۶۴}=\sqrt[۳]{(-۴)^۳}=-۴$

۲۱) ریشه‌ی سوم عدد ۵−، یعنی عددی که وقتی به توان ۳ برسد، برابر با ۵− شود. یعنی $\sqrt[۳]{-۵}$.

۲۲) $\sqrt[۳]{-۷۲۹}\times\sqrt{۳۶}=\sqrt[۳]{(-۹^۳)}\times۶=-۹\times۶=-۵۴$

باتوجه به توضیحات مسئله، واضح است که باید مقدار a را با استفاده از قضیه فیثاغورس بیابیم.



$$a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

$$a^{۲}+(۳)^{۲}=(۱۱)^{۲} \quad \Rightarrow \quad a^{۲}=(۱۱)^{۲}-(۳)^{۲}=۱۱۲$$

چون a، بیان‌گر ارتفاع است، مقدار مثبت آن را در نظر می‌گیریم.

بنابراین: $a=\sqrt{۱۱۲}$

قصد داریم مقدار تقریبی a را به‌دست بیاوریم.

می‌دانیم: $۱۰۰<۱۱۲<۱۲۱\ ,\ ۱۱\times۱۱=۱۲۱\ ,\ ۱۰\times۱۰=۱۰۰$

$$\sqrt{۱۰۰}=۱۰<\sqrt{۱۱۲}<\sqrt{۱۲۱}=۱۱$$

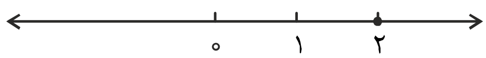
$\sqrt{۱۱۲}$ تقریبا وسط ۱۰ و ۱۱ است. بنابراین حدس می‌زنیم $a=۱۰/۵$ باشد. حدس خود را آزمایش می‌کنیم.

$$(۱۰/۵)\times(۱۰/۵)=۱۱۰/۲۵$$

می‌بینیم که مقدار به ۱۱۲ خیلی نزدیک است.

بنابراین: $a\simeq ۱۰/۵$

۱) $\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^{۳}}=۲$

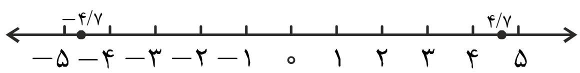


۲) $۱۶<۲۳<۲۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{۱۶}=۴<\sqrt{۲۳}<\sqrt{۲۵}=۵$

در بین چند حدس که آزمایش کردیم، عدد ۴/۷ تقریب مناسب‌تری بود. بنابراین ریشه‌های $\sqrt{۲۳}$، اعداد تقریبی $\pm۴/۷$ هستند.

زیرا:

$$(۴/۷)^{۲}=(-۴/۷)^{۲}=۲۲/۰۹\simeq ۲۳$$

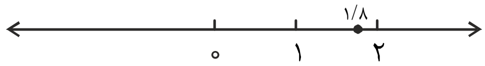


$۳)\ ۱<۶<۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{۱}=۱<\sqrt[۳]{۶}<\sqrt[۳]{۸}=۲$

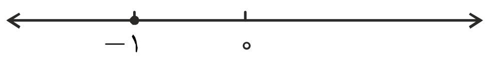
$\sqrt[۳]{۶}$ یک عدد بین ۱ و ۲ است. (چون عدد ۶ به ۸ نزدیک‌تر است تا ۱)، پس ریشه‌ی سوم آن به ۲ $(\sqrt[۳]{۸})$ نزدیک‌تـر اسـت تا ۱ $(\sqrt[۳]{۱})$.

در بین چند حدس، عدد ۱/۸ تقریب بهتری برای $\sqrt[۳]{۶}$ است. زیرا $(۱/۸)^۳=۵/۸$ بنابراین:

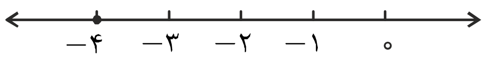
$\sqrt[۳]{۶}\simeq ۱/۸$



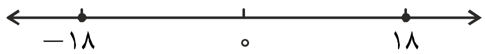
$۴)\ -\sqrt[۳]{۱}=-۱$



$۵)\ \sqrt[۳]{-۶۴}=\sqrt[۳]{(-۴)^۳}=-۴$



$۶)\ (۱۸^۲)=(-۱۸^۲)=۳۲۴$



$۱)\ \dfrac{\sqrt[۵]{-۳۲}}{\sqrt[۴]{۸۱}}=\dfrac{\sqrt[۵]{(-۲)^۵}}{\sqrt[۴]{۳^۴}}=\dfrac{-۲}{۳}$

$۲)\ ۳\times\sqrt[۵]{۳۱۲۵}+۷\sqrt[۴]{۱۲۹۶}=۳\times\sqrt[۵]{۵^۵}+۷\sqrt[۴]{۲^۴\times۳^۴}=۳\times۵+۷\times۶=۵۷$

$۳)\ \sqrt[۵]{a^{۱۰}b^۷c^{-۶}}=\sqrt[۵]{(a^۵)^۲b^۵\times b^۲\times c^{-۵}\times c^{-۱}}=a^۲bc^{-۱}\sqrt[۵]{b^۲\times c^{-۱}}=\dfrac{a^۲b}{c}\times\sqrt[۵]{\dfrac{b^۲}{c}}$

$۴)\ \sqrt[۵]{۷۲}$

$۲^۵=۳۲<۷۲<۳^۵=۲۴۳$

مانند همیشه حدس‌های خود را آزمایش می‌کنیم. بین چند حدس که می‌زنیم عدد ۲/۳ تقریب مناسب‌تری است، زیرا:

$$(۲/۳)^{۵} = ۶۴/۳۶۳۴۳$$

بنابراین:

$$\sqrt[۵]{۷۲} \simeq ۲/۳$$

$$۵)\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}} = \sqrt[۵]{۱۰^{-۱۰}} = \sqrt[۵]{(۱۰^{-۲})^{۵}} = ۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$۶)\sqrt[۵]{۰/۰۰۲۴۳} = \sqrt[۵]{۲۴۳\times ۱۰^{-۵}} = \sqrt[۵]{۳^{۵}\times (۱۰^{-۵})} = ۳\times ۱۰^{-۱} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$۷)\sqrt[۴]{۱۲۰۰۰۰}$$

$$۱^{۴} < ۱۲ < ۲^{۴} = ۱۶$$

عدد ۱/۸ را برای $\sqrt[۴]{۱۲}$ حدس می‌زنیم و می‌بینیم که تقریب مناسبی است.

$$(۱/۸)^{۴} = ۱۰/۴۹۷۶$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt[۴]{۱۲} = ۱/۸$$

$$\sqrt[۴]{۱۲۰۰۰۰} = \sqrt[۴]{۱۲\times ۱۰^{۴}} = \sqrt[۴]{۱۲}\times\sqrt[۴]{۱۰^{۴}} \simeq ۱/۸\times ۱۰ = ۱۸$$

ریشه nاُم

تاکنون با روش به‌دست آوردن ریشه‌های یک عدد، تا ریشه پنجم آشنا شدید. حال باتوجه به الگویی که برای به‌دست آوردن ریشه‌ها آموختیم، می‌توانیم ریشه nاُم یک عدد $(n \in \mathbb{N})$ را محاسبه کنیم.

ریشه nاُم یک عدد

فرض کنیم که n یک عدد طبیعی فرد، $n \geq ۳$، باشد. ریشه nاُم یک عدد مانند a، عدد منحصر به فردی مانند b است که اگر به توان n برسد، برابر با a شود. $(b^{n} = a)$

حال فرض کنیم n یک عدد طبیعی زوج باشد. ریشه nاُم یک عدد مثبت مانند a عددهایی مانند $\pm b$ است، که اگر به توان n برسند برابر با a شوند. $(b^{n} = (-b)^{n} = a)$

دقت کنید که ریشه nاُم عدد صفر، همواره صفر است.

نکته

اگر n زوج باشد، ریشه nاُم را باید برای یک عدد مثبت تعریف کنیم. (چرا؟)

به مثال‌های حل شده زیر توجه کنید.

۱) $\sqrt[۶]{۲^۶}=۲$

۲) $\sqrt[۷]{(-۳)^۷}=-۳$

۳) $\sqrt[n]{a^n}=a \qquad a\geq ۰$

۴) $\sqrt[n]{a^n}=a \qquad$ n فرد

نکته

اگر n یک عدد طبیعی فرد و $n\geq ۳$ باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، در چه صورت روابط بالا برقرارند؟

به یاد داشته باشید که اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، روابط بالا تنها در صورتی برقرارند که $a,b>۰$ باشند.

مثال

۱) $\sqrt[۶]{۱۲}=\sqrt[۶]{۴}\times\sqrt[۶]{۳}$

۲) $\sqrt[۷]{-۱۸}=\sqrt[۷]{-۶}\times\sqrt[۷]{۳}=\sqrt[۷]{۶}\times\sqrt[۷]{-۳}$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۵)^۶}-\sqrt[۷]{(\sqrt{۵}-۵)^۷}$$

پاسخ مثال

$$\sqrt{۵}\simeq ۲/۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}-۵<۰$$
$$\Rightarrow \sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۵)^۶}-\sqrt[۷]{(\sqrt{۵}-۵)^۷}=\left|\sqrt{۵}-۵\right|-(\sqrt{۵}-۵)=۵-\sqrt{۵}-\sqrt{۵}+۵=۱۰-۲\sqrt{۵}$$

مثال

آیا برای هر دو عدد طبیعی m و k رابطه زیر برقرار است؟ (چرا؟)

$$\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{a})^m \quad (a>0)$$

می‌دانیم برای هر عدد حقیقی و مثبت a و هر عدد طبیعی n رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad (1)$$

$$\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[k]{a\times a^{m-1}}\overset{(1)}{=}\sqrt[k]{a}\;\sqrt[k]{a^{m-1}}=\sqrt[k]{a}\;\sqrt[k]{a}\;\sqrt[k]{a^{m-2}}\ldots=\left(\sqrt[k]{a}\right)^m$$

به مثال‌های حل شده‌ی زیر توجه کنید.

۱) $\sqrt[4]{2^2}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$

۲) $\sqrt[5]{10^3}=\left(\sqrt[5]{10}\right)^3$

توان‌های گویا

مثال زیر را با دقت بخوانید.

یک رستوران در تهران، تازه شروع به کار کرده است. حسابدار این رستوران، کار جالبی انجام داده است!

در محاسباتی که او انجام داده متوجه شده که به علت تبلیغات خوب و رضایت مشتریان میزان فروش این رستوران در پایان روز اول تقریباً $5a$، در پایان روز دوم $(5a)^2$، در پایان روز سوم $(5a)^3$ و ... بوده است.

به نظر شما، میزان فروش این رستوران، در وسط روز اول کاری چقدر است؟

در وسط روز دوم کاری چطور؟

این حسابدار مشاهده کرد، در وسط روز اول کاری میزان فروش $(5a)^{\frac{1}{2}}$ است. همچنین در وسط روز دوم کاری مقدار $(5a)^{\frac{3}{2}}$ به‌دست آمد.

توان‌های $(5a)^{\frac{1}{2}}$ و $(5a)^{\frac{3}{2}}$ را توان‌های گویا می‌گوییم و می‌توانیم در زندگی روزمره از آن‌ها استفاده کنیم.

حال که با مفهوم توان‌های گویا آشنا شدید، باید بتوانید آن‌ها را محاسبه کنید.

در ریاضی عدد $(۵a)^{\frac{۱}{۲}}$ را به‌صورت $\sqrt{۵a}$ نمایش می‌دهیم.

همچنین $(۵a)^{\frac{۱}{۳}}$ را به‌صورت $\sqrt[۳]{۵a}$ نمایش می‌دهیم.

به همین ترتیب $(۵a)^{\frac{۱}{n}}$ به شکل $\sqrt[n]{۵a}$ نمایش داده می‌شود.

اعداد زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

الف) $۳^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶^{\frac{۱}{۲}}$

ج) $۹^{\frac{۱}{۷}}$

د) $(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۱}}$

تعریف

فرض کنیم n یک عدد طبیعی زوج و a یک عدد حقیقی مثبت باشد، تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

همچنین فرض کنیم m یک عدد طبیعی که $m\geq 3$ و b یک عدد حقیقی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$b^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{b}$$

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بخواهیم عددی مانند $a^{\frac{k}{n}}$ را محاسبه کنیم، چه باید کرد؟ آیا می‌توانید پاسخ دهید؟!

داریم:

$$a^{\frac{k}{n}}=a^{k\times\frac{1}{n}}=(a^k)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$$

(البته دقت داشته باشید که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، نباید منفی باشد.)

توجه داشته باشید که تمام قوانینی که در مورد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توان‌ها گفته شده، در مورد توان‌های گویا هم صدق می‌کند.

هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید و برعکس.

۱) $\sqrt[4]{8}$

۲) $(\sqrt{7m})^3\ ,\ m>0$

۳) $16^{\frac{1}{2}}$

۴) $(6p)^{\frac{4}{3}}$

۵) $(10a)^{\frac{4}{5}}$

۶) $(64)^{\frac{2}{3}}$

۷) $(\sqrt[4]{a})^5 , a>0$

۸) $\sqrt[4]{4m}\ ,\ m>0$

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $(64n^4)^{\frac{3}{2}}$

۲) $(8r^6)^{\frac{4}{3}}$

۳) $\sqrt{384x^3yz}$

۴) $\sqrt[4]{96x^4y^2z^2}$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\tfrac{3}{4}})^2$$

پاسخ مثال

۱

الف) $۳^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۳}$

ب) $۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۶}$

ج) $۹^{\frac{۱}{۷}} = \sqrt[۷]{۹}$

د) $(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۱}} = \sqrt[۱۱]{\frac{۱}{۲}}$

۲

۱) $\sqrt[۴]{۸} = \sqrt[۴]{۲^۳} = ۲^{\frac{۳}{۴}}$

۲) $(\sqrt{۷m})^۳ = \sqrt[۲]{(۷m)^۳} = (۷m)^{\frac{۳}{۲}}$

۳) $(۱۶)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۴) $(۶p)^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۳]{(۶p)^۴} = \sqrt[۳]{۶^۴p^۴} = ۶p\sqrt[۳]{۶p}$

۵) $(۱۰a)^{\frac{۴}{۵}} = \sqrt[۵]{(۱۰a)^۴} = \sqrt[۵]{۱۰^۴ \times a^۴}$

۶) $(۶۴)^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{(۶۴)^۲} = \sqrt[۳]{(۲^۶)^۲} = \sqrt[۳]{۲^{۱۲}} = ۲^۴ = ۱۶$

۷) $(\sqrt[۴]{a})^۵ = \sqrt[۴]{a^۵} = a^{\frac{۵}{۴}}$

۸) $\sqrt[۴]{۴m} = (۴m)^{\frac{۱}{۴}} = ۴^{\frac{۱}{۴}} \times m^{\frac{۱}{۴}}$

۳

$$۱)(۶۴n^۴)^{\frac{۳}{۲}}=(۲^۶\times n^۴)^{\frac{۳}{۲}}=۲^{۶\times\frac{۳}{۲}}\times n^{۴\times\frac{۳}{۲}}=۲^۹\times n^۶=۵۱۲n^۶$$

$$۲)(۸r^۶)^{\frac{۴}{۳}}=(۲^۳\times r^۶)^{\frac{۴}{۳}}=(۲^۳)^{\frac{۴}{۳}}\times(r^۶)^{\frac{۴}{۳}}=۲^۴\times r^۸=۱۶r^۸$$

$$۳)\sqrt{۳۸۴x^۳yz}=\sqrt{۲^۷\times۳x^۳yz}=۲^۳\times x\sqrt{۲\times۳xyz}=۸x\sqrt{۶xyz}$$

$$۴)\sqrt[۴]{۹۶x^۴y^۲z^۲}=\sqrt[۴]{۲^۵\times۳\times x^۴y^۲z^۲}=۲x\sqrt[۴]{۲\times۳y^۲z^۲}=۲x\sqrt[۴]{۶y^۲z^۲}$$

۴

$$(\sqrt[۶]{۲۷}-\sqrt{۶\frac{۳}{۴}})^۲=(۲۷^{\frac{۱}{۶}}-(۶\frac{۳}{۴})^{\frac{۱}{۲}})^۲$$

$$=\left((۳^۳)^{\frac{۱}{۶}}-(\frac{۲۷}{۴})^{\frac{۱}{۲}}\right)^۲=\left(۳^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۳^{\frac{۳}{۲}}}{۲}\right)^۲=۳+\frac{۳^۳}{۴}-۳^{\frac{۴}{۲}}$$

$$=۳+\frac{۲۷}{۴}-۹=\frac{۳}{۴}$$

عبارت‌های جبری

می‌دانیم که در بسیاری از مسئله‌ها، لازم است صورت سؤال را به زبان ریاضی بنویسیم. چندجمله‌ای‌ها و اتحادها می‌توانند در حل مسائل به ما کمک کنند.

گاهی باید یک عبارت جبری را به صورت یک اتحاد ریاضی بنویسیم و گاهی برعکس، در بعضی مواقع عمل فاکتورگیری، می‌تواند یک سؤال سخت را آسان کند.

بنابراین لازم است که کار کردن با اتحادها و فاکتورگیری را خوب بیاموزیم.

مثال

دو عدد فرد و متوالی مثبت را بیابید که حاصل جمع مربع‌های آن‌ها ۱۳۰ شود.

پاسخ

m را عددی فرد در نظر می‌گیریم و مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$m^۲+(m+۲)^۲=۱۳۰$$

$$\Rightarrow m^۲+m^۲+۴m+۴=۱۳۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۴m-۱۲۶=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۲m-۶۳=۰\Rightarrow(m+۹)(m-۷)=۰\Rightarrow m=-۹ \text{ یا } m=۷$$

$m=۷$، تنها مقدار قابل قبول است. (چرا؟) بنابراین آن دو عدد، ۷ و ۲+۷ هستند. جواب به‌دست آمده را امتحان می‌کنیم.

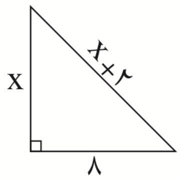
$$(۷^۲)+۹^۲=۴۹+۸۱=۱۳۰$$

مثال

طول وتر یک مثلث قائم الزاویه، ۲ واحد بیشتر از طول یکی از اضلاع این مثلث است. اگر طول ضلع دیگر این مثلث ۸ واحد باشد، اندازه دو ضلع دیگر آن را مشخص کنید.

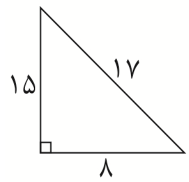
پاسخ

باتوجه به قضیه فیثاغورس داریم:



$$x^{۲}+(۸)^{۲}=(x+۲)^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۶۴=x^{۲}+۴x+۴$$
$$\Rightarrow ۶۴=۴x+۴\Rightarrow x=۱۵$$

$\Rightarrow$



همان‌طور که می‌دانید یک تساوی جبری همیشه درست به این معنی که به ازای هر مقدار تعریف شده برای متغیرهای آن، حاصل یکسانی داشته باشد را یک اتحاد جبری می‌گوییم.

اتحادهایی که تاکنون فرا گرفته‌اید را مرور می‌کنیم:

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$
$$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$$
$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$$

در ادامه قصد داریم چند اتحاد پرکاربرد دیگر را به شما آموزش بدهیم.

حاصل عبارت $(a+b)^{۳}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\begin{aligned}(a+b)^{۳}&=(a+b)^{۲}(a+b)=(a^{۲}+۲ab+b^{۲})(a+b)\\&=a^{۳}+a^{۲}b+۲a^{۲}b+۲ab^{۲}+b^{۲}a+b^{۳}\\&=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

رابطه به‌دست آمده یک اتحاد است و به اتحاد مکعب مجموع معروف است. حال به جای b مقدار $(-b)$ را قرار دهید و بسط $(a-b)^{۳}$ را بنویسید.

$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$$

دو رابطه به‌دست آمده که اتحادهای مکعب مجموع هستند را به خاطر بسپارید.

زنگ تفریح

یک رابطه جالب !!!

به مثلث زیر و رابطه بین اعداد آن دقت کنید.

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

از طرفی داریم:

$$\begin{array}{ll} (a+b)^0 & 1 \\ (a+b)^1 & 1a+1b \\ (a+b)^2 & 1a^2+2ab+1b \\ (a+b)^3 & 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b \\ (a+b)^4 & 1a^4+4a^3b+6a^2b+4ab^2+1b^4 \end{array}$$

آیا می‌توانید مقدار $(a+b)^5$ را به‌دست آورید؟

مثلث اعدادی که مشاهده کردید، به مثلث خیام- پاسکال معروف است.

مثلث خیام- پاسکال به آرایش مثلثی شکل ضرایب بسط دو جمله‌ای گفته می‌شود.

تجزیه عبارت جبری

می‌دانیم:

$$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$$

از طرفی داریم:

$$(a-b)^۳ = (a-b)(a-b)(a-b)$$

اگر بنویسیم:

$$a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ = (a-b)(a-b)(a-b)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ را به حاصل‌ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $(a-b)$ را یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. عامل‌های تجزیه می‌توانند مساوی نباشند. گاهی اوقات تجزیه یک عبارت کار پیچیده‌تری می‌شود.

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$a(a+b) - ۲b(a+b)^۲$$

پاسخ

$$a(a+b) - ۲b(a+b)^۲ = (a+b)[a - ۲b(a+b)] = (a+b)(a - ۲ab - ۲b^۲)$$

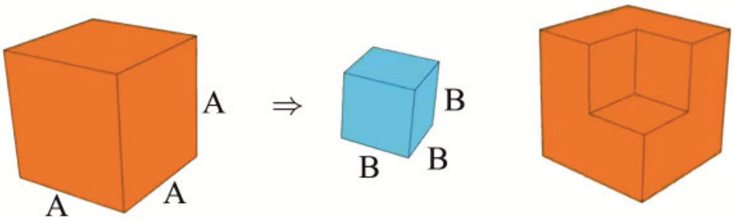
متن زیر را مطالعه کنید.

پدر علی، طراح دکوراسیون داخلی است. او برای اتاق کودک یک مبل راحتی طراحی کرده، که علاوه بر نشستن بتوان از فضای بالای آن برای قرار دادن اسباب‌بازی استفاده کرد. ایده اولیه این طراحی به‌صورت زیر است. او ابتدا یک مکعب به ابعاد A شبیه‌سازی کرده و سپس یک مکعب کوچک‌تر به ابعاد B را از یکی از کُنج‌های آن بیرون کشیده است. به نظر شما حجم مکعب باقی‌مانده چقدر است؟

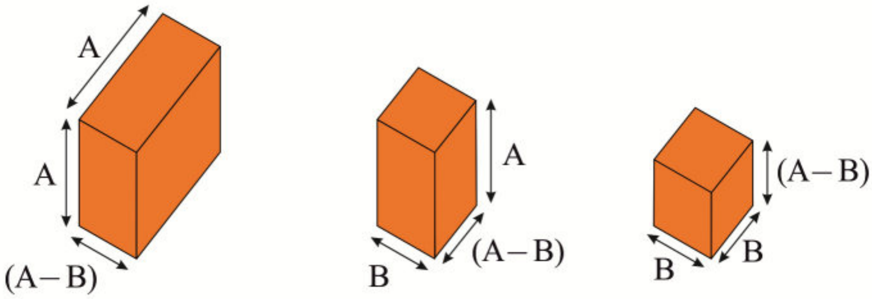
پاسخ

اختلاف حجم مکعب بزرگ‌تر از مکعب کوچک‌تر $A^۳ - B^۳$ است.

حال می‌خواهیم باتوجه به آن‌چه که در شکل می‌بینیم حجم مورد نظر را محاسبه کنیم.



جسم مورد نظر را به مکعب‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم و حجم هر یک را محاسبه می‌کنیم.



داریم:

$$A^3-B^3=(A-B)A^2+(A-B)B^2+(A-B)(AB)=(A-B)(A^2+B^2+AB)$$

رابطه زیر برای هر مقدار A و B صادق است و به اتحاد چاق و لاغر معروف است.

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

در ادامه یکی دیگر از اتحادهای پر کاربرد را معرفی می‌کنیم.

حاصل عبارت $(a+b+c)^2$ را به‌دست بیاورید.

پاسخ

$$(a+b+c)^2=\left[(a+b)+c\right]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

رابطه به‌دست آمده یک اتحاد است و به مربع سه جمله‌ای معروف است. بنابراین داریم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$$

۱. اگر $a+b+c=۸$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۱۶$ باشد، حاصل $ab+ac+bc$ چقدر است؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۲a-۳b)^۳$

ب) $(۳a^۲-b^۲)^۳$

ج) $(a^۲+۱)^۳$

د) $(۲a-۳)(۴a^۲+۶a+۹)$

هـ) $(a^۵-a^۳)(a^{۱۰}+a^۸+a^۶)$

و) $(a^۲+b)(a^۴-a^۲b+b^۲)$

۳. حاصل عبارات زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(a-۲)(a+۲)(a^۲+۷)$

ب) $(a-۱)(a+۱)(a^۴+a^۲+۱)$

ج) $(a+۱)(a^۲-a+۱)(a^۳-۱)$

د) $(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۳+۵)$

هـ) $(a-۱)^۳(a+۱)^۳$

عبارت گویا

به طور کلی، یک عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای است.

نکته

یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج را صفر می‌کند، تعریف نمی‌گردد.

مثال

عبارت‌های $\frac{۲x^۲+۳}{x-۴}$، $\frac{x^۳+y^۳-۲}{xy+y^۶-۷}$، $\frac{۱}{y}$ و $\frac{x^۳}{۱}$ عبارت‌های گویا هستند.

عبارت‌های $\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۲-۱}$ و $\frac{x^۲+۳x-۴}{\sqrt{x}+۷}$ عبارت‌های گویا نیستند، زیرا شامل عبارت‌های جبری رادیکالی هستند.

(توان متغیرها باید عدد صحیح باشد)

در گذشته با مفهوم مضرب و شمارنده اعداد آشنا شدید، مثلاً عدد ۱۸=۳×۶ را در نظر بگیرید. ۱۸ مضربی برای اعداد ۶ و ۳ است و هر کدام از اعداد ۳ و ۶ یک شمارنده برای ۱۸ هستند.

می‌دانیم مضرب یک عدد منحصر به فرد نیست.

این مفاهیم را برای عبارات جبری نیز می‌شود تعمیم داد.

تعریف

مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا هم‌زمان در هر دو) به دست می‌آیند.

عبارات $(x+۷)x^۲$، $(x^۲+۳x+۴)x^۲$، $\frac{x^۲}{y}$، $۶x^۲$ و $۵(x^۳+۲)x^۲$ همگی مضاربی برای $x^۲$ هستند.

$\sqrt{۷}(x+y)$ مضرب $x+y$ نیست، زیرا $\sqrt{۷}$ یک عدد صحیح نمی‌باشد.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا با مخرج یکسان

اگر A و B عبارت‌های جبری باشند داریم:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B} \quad , \quad \frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$$

مراحل جمع و تفریق عبارت‌های گویا با مخرج‌های غیر یکسان

ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم (با استفاده از اطلاعاتی که در مورد اتحادها و فاکتورگیری داریم).

سپس مخرج مشترکی با شرایط زیر پیدا می‌کنیم.

عوامل مشترک و غیرمشترک مخرج‌ها با بزرگ‌ترین توان را در نظر گرفته و همه را در هم ضرب می‌کنیم (معادل کوچک‌ترین مضرب مشترک در اعداد).

در مرحله بعد صورت و مخرج هر کسر را در عبارات لازم ضرب کرده تا مخرج‌ها یکی شوند.

سپس با استفاده از روش جمع و تفریق عبارات گویا با مخرج یکسان، جواب مورد نظر به‌دست می‌آید.

مثال

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۷}{۲a^۲b}+\frac{۵}{۳ab^۳}$

ب) $\frac{x-۱}{(x-۲)x}-\frac{x}{(x-۱)(x-۲)}$

ج) $\frac{۱}{x^۲-۲x+۱}-\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$

پاسخ

الف) $2a^2b$ و $3ab^3$ مخرج کسرهای سؤال هستند. باتوجه به توضیحات گفته شده $2\times3\times a^2\times b^3$ مخرج مشترک موردنظر است. بنابراین

$$\frac{7}{2a^2b}+\frac{5}{3ab^3}=\frac{7\times3\times b^2+5\times2\times a}{2\times3\times a^2\times b^3}=\frac{21b^2+10a}{6a^2b^3}$$

ب) $(x)(x-1)(x-2)$ مخرج مشترک برای دو کسر داده شده است.

$$\frac{x-1}{(x-2)x}-\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)(x-1)-x(x)}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-2x+1-x^2}{x(x-1)(x-2)}=\frac{-2x+1}{x(x-1)(x-2)}$$

ج) در این سؤال برای به‌دست آوردن مخرج مشترک، ابتدا مخرج کسرهای داده شده را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$
$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$
$$\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x-2)-2(x-1)}{(x-2)(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-2-2x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{-x}{(x-2)(x-1)^2}$$

۴ **عبارت $A=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$ را ساده کنید. آیا حاصل یک عبارت گویا است؟**

گویا کردن مخرج‌های گنگ

به عملیاتی که روی صورت و مخرج یک کسر گنگ انجام می‌دهیم تا مخرج آن تبدیل به یک عبارت گویا شود، گویا کردن مخرج گفته می‌شود.

مثال

مخرج عبارت رادیکالی $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ را گویا کنید.

پاسخ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

۵ **عبارت $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}$ را ساده کنید.**

پاسخ مثال

۱

$$a^۲+b^۲+c^۲=(a+b+c)^۲-۲(ab+ac+bc)$$
$$\Rightarrow ۱۶=۸^۲-۲(ab-ac+bc)$$
$$۲(ab+ac+bc)=۴۸$$
$$\Rightarrow ab+ac+bc=۲۴$$

۲

الف) $(۲a-۳b)^۳=(۲a)^۳-۳\times(۲a)^۲\times ۳b+۳\times ۲a\times(۳b)^۲-(۳b)^۳=۸a^۳-۳۶a^۲b+۵۴ab^۲-۲۷b^۳$

ب) $(۳a^۲-b^۲)^۳=(۳a^۲)^۳-۳\times(۳a^۲)^۲\times b^۲+۳\times ۳a^۲\times(b^۲)^۲-(b^۲)^۳=۲۷a^۶-۲۷a^۴b^۲+۹a^۲b^۴-b^۶$

ج) $(a^۲+۱)^۳=(a^۲)^۳+۳(a^۲)^۲\times ۱+۳\times a^۲\times ۱^۲+۱=a^۶+۳a^۴+۳a^۲+۱$

د) $(۲a-۳)(۴a^۲+۶a+۹)=(۲a)^۳-۳^۳=۸a^۳-۲۷$

هـ) $(a^۵-a^۳)(a^{۱۰}+a^۸+a^۶)=(a^۵)^۳-(a^۳)^۳=a^{۱۵}-a^۹$

و) $(a^۲+b)(a^۴-a^۲b+b^۲)=(a^۲)^۳+(b)^۳=a^۶+b^۳$

۳

الف) $(a-۲)(a+۲)(a^۲+۷)=(a^۲-۴)(a^۲+۷)=a^۴+۳a^۲-۲۸$

ب) $(a-۱)(a+۱)(a^۴+a^۲+۱)=(a^۲-۱)(a^۴+a^۲+۱)=(a^۲)^۳-(۱)^۳=a^۶-۱$

ج) $(a+۱)(a^۲-a+۱)(a^۳-۱)=(a^۳+۱)(a^۳-۱)=(a^۳)^۲-(۱)^۲=a^۶-۱$

د) $(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۳+۵)=(a^۳-۱)(a^۳+۵)=(a^۳)^۲+(۵-۱)a^۳+(-۱)(۵)=a^۶+۴a^۳-۵$

هـ) $(a-۱)^۳(a+۱)^۳=(a^۲-۱)^۳=a^۶-۳a^۴+۳a^۲-۱$

۴

ابتدا هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را ساده می‌کنیم.

$$1-\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}=\frac{x^2-x-12}{x^2}=\frac{(x-4)(x+3)}{x^2}$$

$$1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-5x+4}{x^2}=\frac{(x-4)(x-1)}{x^2}$$

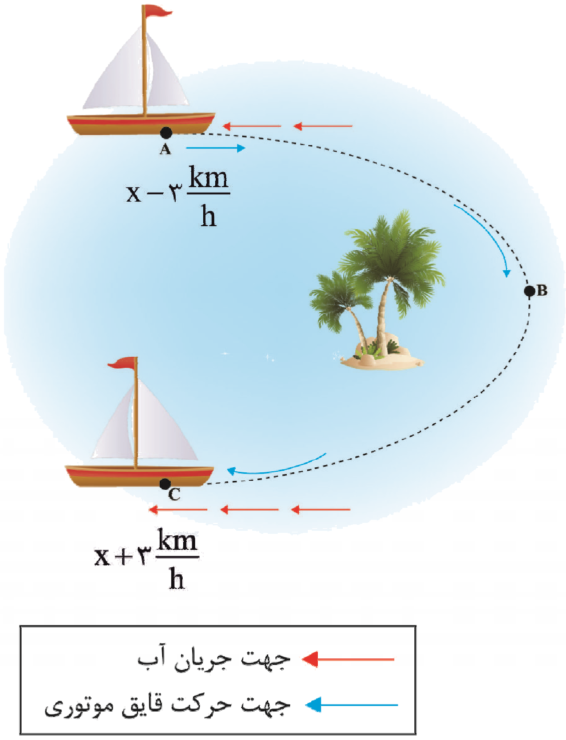
$$A=\frac{(x-4)(x+3)}{x^2}\div\frac{(x-4)(x-1)}{x^2}=\frac{(x-4)(x+3)}{x^2}\times\frac{x^2}{(x-4)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}$$

همان‌طور که مشاهده کردیم، حاصل یک عبارت گویاست.

۵

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}=\frac{1\times(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}{(\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}{a+1}$$

معادله‌ی درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن



مثال زیر را با دقت بخوانید:

فرض کنید یک قایق موتوری روی مسیر نقطه‌چین در حرکت باشد. اگر سرعت جریان آب $3\frac{km}{h}$ (در جهت نشان داده شده) و کل زمان طی شده (از نقطه‌ی A تا C) ۱۲ ساعت باشد، با توجه به این‌که مسافت نقطه‌ی A تا C روی منحنی ۹۶ km است، سرعت حرکت قایق را محاسبه کنید.

اگر سرعت حرکت قایق را x در نظر بگیریم، سرعت حرکت قایق با توجه به جریان آب از نقطه‌ی A تا B برابر با $x-3\frac{km}{h}$ و در نقطه‌ی B تا C، $x+3\frac{km}{h}$ است. (چرا؟)

می‌دانیم:

$$\text{مسافت} = \text{سرعت} \times \text{زمان} \Rightarrow \text{زمان} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$$

بنابراین $\frac{48}{x-3}$ ساعت طول می‌کشد که قایق موتوری از نقطه‌ی A به B و $\frac{48}{x+3}$ ساعت طول می‌کشد تا از نقطه‌ی B به C برود.

از طرفی با توجه به صورت سؤال، کل زمان طی شده برابر با ۱۲ ساعت است. در نتیجه:

$$\frac{48}{x-3}+\frac{48}{x+3}=12 \quad , \quad x \neq \pm 3$$

$$\frac{48(x+3)+48(x-3)}{(x-3)(x+3)}=12 \Rightarrow 48(x-3)+48(x+3)=12(x-3)(x+3)$$

$$\Rightarrow x^2-8x-9=0 \quad (*)$$

در بسیاری از مسائل با معادلاتی نظیر معادله‌ی بالا روبه‌رو می‌شویم و برای حل آن‌ها باید بتوانیم مقدار مجهول معادله (x) را بیابیم. حال قدم به قدم با حل این نمونه معادلات آشنا می‌شویم.

تعریف:

هر معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ را یک معادله‌ی درجه‌ی دو می‌نامیم هرگاه:

۱) $a\neq ۰$ ۲) $a,b,c\in\mathbb{R}$ ۳) x یک متغیر باشد.

در واقع هر معادله مانند معادله‌ی $(*)$ که پس از ساده کردن، درجه بزرگ‌ترین توان متغیر آن دو باشد، را یک معادله‌ی درجه‌ی دو می‌نامیم.

مثال

معادلات زیر همگی درجه‌ی دو هستند.

$$x^۲+۳x-۵=۰ \quad , \quad ۲x^۲-x-۱=۰ \quad , \quad \sqrt{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}x+۳=۰$$

با توجه به تعریف، a باید عدد حقیقی مخالف صفر باشد، اما b و c هر کدام و یا هر دو می‌توانند صفر باشند به عنوان مثال معادلات $۳x^۲+۵x=۰, ۲x^۲=۰, x^۲-۹=۰$ همگی درجه دو هستند.

در جدول زیر مقدار b, a و c برای برخی معادلات درجه‌ی دو مشخص شده‌اند.

معادلات	a	b	c
$۳x^۲+۵x-۹=۰$	۳	۵	-۹
$-x^۲+\frac{۱}{۲}=۰$	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$
$(\sqrt{۳}+۱)x^۲=۰$	$\sqrt{۳}+۱$	۰	۰
$\frac{x^۲}{۲}-\frac{x}{۳}+\frac{۱}{۴}=۰$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$

مشخص کنید چند تا از معادلات زیر درجه‌ی دو هستند؟

الف) $x^{۲}+۱=۰$ ب) $\frac{۱}{۲}x^{۲}-\sqrt{۲}x+۵=۰$ ج) $۲x^{۲}-۳x=۵$

د) $x^{۲}-۲x^{-۱}+۳=۰$ هـ) $(x-۲)x^{۲}=۰$ و) $(x-۱)(x+۲)=۰$

برای حل معادلات درجه‌ی دو باید مقدار x را طوری بیابیم که سمت چپ و سمت راست تساوی دارای یک مقدار شوند.

مقادیر به دست آمده برای x، ریشه‌های معادله‌ی درجه دو نامیده می‌شوند.

روش‌هایی وجود دارند که به ما در حل معادلات درجه‌ی دو کمک می‌کنند.

الف) حل معادلات درجه‌ی دو به شکل $ax^{۲}=۰$, $a\neq ۰$

داریم:

اگر $AB=۰$ باشد،
آن‌گاه $A=۰$ یا $B=۰$

$$ax^{۲}=۰\ ,\ a\neq ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow x.x=۰$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، این معادله دارای دو ریشه مساوی است.

معادله‌ی $-\frac{۳}{۲}x^{۲}=۰$ **را حل کنید.**

ب) حل معادلات درجه دو به شکل $ax^{۲}+bx=۰$

داریم:

$$ax^{۲}+bx=۰$$
$$x(ax+b)=۰$$
$$x=۰ \ \text{یا}\ x=-\frac{b}{a}$$

معادلات زیر را حل کنید:

الف) $x^{۲}+x=۰$ ب) $-۴x^{۲}+۵x=۰$ ج) $\sqrt{۳}x^{۲}-۲x=۰$

ج) حل معادلات درجه دو به شکل $ax^2 + c = 0, a, c \neq 0$

داریم:

$$ax^2 + c = 0 \quad a, c \neq 0$$

$$ax^2 = -c \Rightarrow$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

در اینجا علامت $\frac{c}{a}$ مهم است.

اگر $\frac{c}{a} > 0$ ، آن‌گاه معادله جواب حقیقی ندارد، زیرا عدد منفی زیر رادیکال بی‌معنی است.

اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آن‌گاه معادله دو جواب حقیقی دارد که قرینه‌ی یکدیگرند.

جواب معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $3x^2 - 27 = 0$

ب) $2x^2 + 6 = 0$

ج) $7 - 4x^2 = 2$

د) حل معادلات درجه‌ی دو به شکل $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

سه روش پایه برای حل این معادلات وجود دارد:

۱- تجزیه

۲- مربع کامل کردن

۳- استفاده از فرمول

۱- تجزیه

اگر بتوانیم معادله‌ی درجه‌ی دو $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، این معادله به راحتی حل می‌شود.

مثال

معادلات زیر را با استفاده از تجزیه کردن حل کنید.

الف) $x^{۲}+۳x+۲=۰$

ب) $x^{۲}-۲x-۱۵=۰$

ج) $۴x^{۲}-۶x-۴=۰$

پاسخ

الف)

$$x^{۲}+۳x+۲=۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x+۱)=۰$$
$$x+۱=۰$$
$$\Rightarrow x+۲=۰ \text{ یا }$$
$$\Rightarrow x=-۲ \text{ یا } x=-۱$$

ب)

$$x^{۲}-۲x-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰$$
$$\text{یا } x+۳=۰$$
$$\Rightarrow x-۵=۰$$
$$\Rightarrow x=۵ \text{ یا } x=-۳$$

ج)

$$۴x^{۲}-۶x-۴=۰$$
$$\Rightarrow (۲x-۴)(۲x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow ۲x-۴=۰ \text{ یا } ۲x+۱=۰$$
$$\Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-\frac{۱}{۲}$$

۲- مربع کامل کردن

در این روش قصد داریم معادله‌ی درجه دو $ax^{۲}+bx+c, a\neq ۰$ را طوری بنویسیم که یک عبارت جبری مربع کامل در آن ظاهر شود. در این صورت معادله به راحتی قابل حل است.

گاهی به راحتی می‌شود این کار را انجام داد.

مثال

الف) $x^{۲}+۶x+۹=(x+۳)^{۲}$

ب) $x^{۲}-۴x+۴=(x-۲)^{۲}$

گاهی باید تغییراتی در عبارت جبری به وجود آوریم.

برای مربع کامل کردن یک عبارت جبری مراحل زیر را انجام دهید.

۱- مطمئن شوید که ضریب $a=1$ است، اگر $a \neq 1$ است، طرفین تساوی را بر a تقسیم کنید.

۲-معادله‌ی به دست آمده را طوری بنویسید که ضریب ثابت (c) در یک طرف تساوی و بقیه در طرف دیگر تساوی باشند.

۳- ضریب x را بر دو تقسیم کنید و حاصل را به توان ۲ برسانید.

۴- عدد به‌دست آمده را به دو طرف تساوی اضافه کنید.

۵- عبارت جبری به‌دست آمده را به صورت مربع کامل بنویسید.

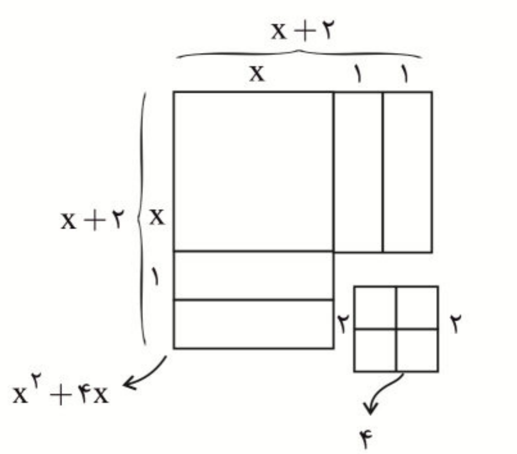
۶- معادله‌ی حاصل را به راحتی می‌توانید با استفاده از خاصیت ریشه دوم حل کنید.

مثال

معادله‌ی $x^2+4x=0$ را مربع کامل کنید.

پاسخ

همان‌طور که در شکل نیز می‌بینید، این معادله برای این که مربع کامل شود، فقط ۴ واحد کم دارد، داریم:



$$x^2+4x=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4=4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{4} \Rightarrow |x+2|=2 \Rightarrow x+2=\pm 2$$

$$\Rightarrow x_1=-4 \text{ و } x_2=0$$

مثال

معادله‌های زیر را با مربع کامل کردن حل کنید:

الف) $x^2+6x-7=0$

ب) $2x^2-4x+1=0$

پاسخ

الف)

$$x^{2}+6x-7=0$$
$$x^{2}+6x=7$$
$$^{2}+6x+9=7+9$$
$$(x+3)^{2}=16$$
$$x+3=\pm 4$$
$$x_{1}=-7\ ,\ x_{2}=1$$

ب)

$$2x^{2}-4x+1=0$$
$$x^{2}-2x+\frac{1}{2}=0$$
$$x^{2}-2x=-\frac{1}{2}$$
$$x^{2}-2x+1=-\frac{1}{2}+1$$
$$(x-1)^{2}=\frac{1}{2}$$
$$x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$_{1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x_{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳- استفاده از فرمول

این روش در حل بسیاری مسائل به ما کمک می‌کند. بنابراین وقتی روش‌های گفته شده قبلی روی یک معادله جواب موردنظر را نداد، با استفاده از فرمول می‌توانید به نتیجه‌ی دلخواه برسید.

مراحل زیر را دنبال کنید:

$$ax^{2}+bx+c=0 \qquad (a\neq 0\ ,\ a,b,c\in\mathbb{R})$$

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$ (دو طرف را به عدد a تقسیم می‌کنیم)

$$x^{2}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$ (تلاش می‌کنیم تا به مربع کامل برسیم)

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^{2}=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^{2}$$ ($(\frac{b}{2a})^{2}$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم)

$$(x+\frac{b}{2a})^{2}=\frac{-4ac+b^{2}}{4a^{2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}}=\frac{\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$x_{1}=\frac{-b+\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\ ,\ x_{2}=\frac{-b-\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

عبارت $b^{2}-4ac$ را Δ می‌نامیم.

حل فرمولی معادله‌ی درجه‌ی دو

اگر $ax^2+bx+c=0$ و $a\neq 0$ باشد، آن‌گاه: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

که $\Delta=b^2-4ac$.

مثال

با به کار بردن فرمول، معادله‌ی درجه‌ی دو $x^2+2x-8=0$ را حل کنید.

پاسخ

ابتدا ضرایب b,a و c را مشخص می‌کنیم.

$$a=1\ ,\ b=2\ ,c=-8$$

حال این مقادیر را در فرمول قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-8)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2\ ,\ x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

مثال

ریشه‌های معادله‌ی زیر را با استفاده از فرمول به‌دست آورید.

$$3x^2+2x-4=0$$

پاسخ

$$a=3\ ,\ b=2\ ,c=-4$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times3\times(-4)}}{2\times3}=\frac{-2\pm\sqrt{52}}{6}$$

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{52}}{6}=\frac{-2+2\sqrt{13}}{6}=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{52}}{6}=\frac{-2-2\sqrt{13}}{6}=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$$

در ادامه قصد داریم با استفاده از علامت Δ، تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو را به‌دست آوریم.

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۲) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد. (ریشه‌ی مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه‌ی دو).

۳) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد.

مثال

معادله‌ی $x^2 + 6x + 7 = 0$ را حل کنید.

پاسخ

ابتدا مقدار Δ را می‌یابیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - (4 \times 1 \times 7) = 8 \Rightarrow \Delta > 0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هرگاه مقدار Δ مثبت باشد، معادله دارای دو ریشه متمایز است.

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2} = -3 + \sqrt{2} \qquad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2} = -3 - \sqrt{2}$$

مثال

معادله‌ی $x^2 - 4x + 4$ را حل کنید.

پاسخ

ابتدا مقدار Δ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - (4 \times 1 \times 4) = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4 - \sqrt{0}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{0}}{2}$$

بنابراین:

$$x_1 = x_2 = 2$$

می‌بینیم هنگامی که $\Delta = 0$ است، معادله یک ریشه دارد. (دو ریشه برابر که به آن ریشه مضاعف می‌گوییم).

مثال

معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

پاسخ

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - (4 \times 1 \times 5) = -16$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، $\Delta < 0$ است، بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال

معادله‌ی $mx^{۲}+(۲m+۱)x+m-۱=۰$ دو ریشه حقیقی دارد. مقدار m را بیابید.

پاسخ

معادله دو ریشه حقیقی دارد، در نتیجه $\Delta>۰$ است.

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۲m+۱)^{۲}-۴m(m-۱)=۴m^{۲}+۴m+۱-۴m^{۲}+۴m=۸m+۱$$

$$\Delta=۸m+۱>۰\Rightarrow ۸m>-۱\Rightarrow m>-\frac{۱}{۸}$$

بنابراین اگر $m>-\frac{۱}{۸}$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد.

مثال

ثابت کنید اگر a و b نابرابر باشند، معادله‌ی $(a^{۲}+b^{۲})x^{۲}+۲(a+b)x+۲=۰$ ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ

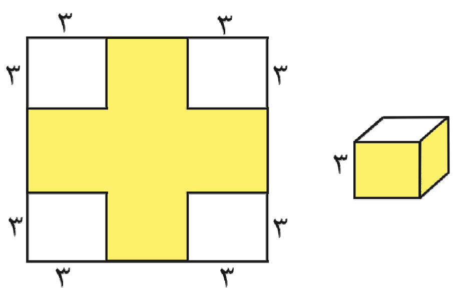
$$\Delta=۴(a+b)^{۲}-۴(a^{۲}+b^{۲})\times ۲$$
$$=۴(a^{۲}+۲ab+b^{۲})-۸(a^{۲}+b^{۲})$$
$$=۴a^{۲}+۸ab+۴b^{۲}-۸a^{۲}-۸b^{۲}$$
$$=-۴a^{۲}+۸ab-۴b^{۲}$$
$$=-۴(a-b)^{۲}$$

اگر $a\neq b$ باشد، همواره $\Delta<۰$ می‌شود.

در نتیجه معادله‌ی داده شده ریشه حقیقی ندارد.

مثال

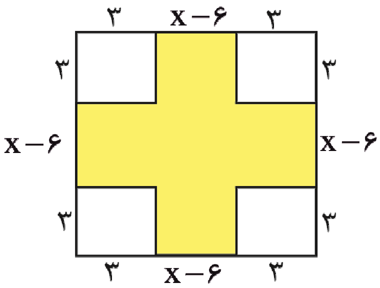
یک آهن‌بر ، از هر کدام از گوشه‌های یک صفحه‌ی فلزی، مربعی به طول ۳cm را برش می‌دهد و جدا می‌کند (مانند شکل). سپس لبه‌های صفحه باقی‌مانده را به سمت بالا حالت می‌دهد، تا یک جعبه‌ی رو باز ساخته شود، اگر حجم جعبه $۴۸cm^{۳}$ باشد، ابعاد صفحه فلزی چه عددی است؟



پاسخ

اگر طول ضلع صفحه‌ی فلزی مربعی شکل x باشد، داریم:

چون حجم جعبه $۴۸cm^۳$ است.



$$۳(x-۶)^۲ = ۴۸$$

$$(x-۶)^۲ = ۱۶$$

$$x-۶ = \pm ۴$$

$$x_۱ = ۱۰ \quad , \quad x_۲ = ۲$$

$x_۲ = ۲$ قابل قبول نیست. زیرا دو تا از اضلاع مکعب منفی می‌شود. بنابراین طول ضلع صفحه‌ی فلزی $x = ۱۰$ است.

مطالب زیر را می‌توانید در صورت تمایل مطالعه کنید.

تا اینجا مشاهده کردید که ریشه‌های یک معادله به ضرایب آن وابسته‌اند. بنابراین به طور قطع رابطه‌ای میان ریشه‌ها و ضرایب یک معادله وجود دارد.

می‌دانیم ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $(a \neq ۰)$ به‌صورت زیر هستند.

$$x_۱ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \, , \, x_۲ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در ادامه قصد داریم ریشه‌های یک معادله درجه‌ی دوم را (در صورت وجود) با هم جمع کنیم.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}+(-b+\sqrt{\Delta})}{۲a} = \frac{-۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

بنابراین

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a}$$

اگر ریشه‌های یک معادله درجه‌ی دو را (در صورت وجود) در هم ضرب کنیم، داریم:

$$x_۱.x_۲ = (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}).(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}) = \frac{(-b-\sqrt{\Delta}).(-b+\sqrt{\Delta})}{۴a^۲}$$

$$= \frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲} = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

در نتیجه

$$x_۱.x_۲ = \frac{c}{a}$$

مثال

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه‌ی دو $ax^2+bx+c=0$ باشند، مقدار $|x_1-x_2|$ را به‌دست آورید.

پاسخ

داریم

$$x_1-x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}+b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

در نتیجه

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۵ بدون حل کردن، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2x^2+6x+5=0$

ب) $x^2-3x-5=0$

۶ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های غیرمنفی معادله‌ی $3x^2+2mx+1=0$ باشند به‌طوری‌که داشته باشیم $x_1=3x_2$. ریشه‌های x_1 و x_2 و مقدار m را بیابید.

پاسخ مثال

۱

معادلات الف، ب و ج واضح است که درجه‌ی دو هستند. (چرا؟)

معادله‌ی (د) دارای متغیر x^{-1} است، بنابراین این معادله درجه‌ی دو نیست.

در قسمت (و) معادله‌ی $(x-1)(x+2)=0$ همان معادله‌ی $x^2+x-2=0$ است که یک معادله‌ی درجه‌ی دو می‌شود.

در معادله‌ی (هـ) داریم: $(x-2)x^2=x^3-2x^2=0$، بزرگ‌ترین توان متغیر x، ۳ است، بنابراین معادله درجه‌ی دو نیست.

۲

$$-\frac{3}{2}x^2=0\xrightarrow{\text{طبق روش الف}}x^2=0\Rightarrow x_1=x_2=0$$

الف) $x^۲+x=۰$

$x(x+۱)=۰\Rightarrow$

$x=۰$ یا $x+۱=۰\Rightarrow$

$x=۰$ یا $x=-۱$

ب) $-۴x^۲+۵x=۰$

$x(-۴x+۵)=۰\Rightarrow$

$x=۰$ یا $-۴x+۵=۰$

$x=۰$ یا $x=\frac{۵}{۴}$

ج) $\sqrt{۳}x^۲-۲x=۰$

$x(\sqrt{۳}x-۲)=۰$

$x=۰$ یا $x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

الف) $۳x^۲-۲۷=۰$

$۳x^۲=۲۷\Rightarrow$

$x^۲=۹$

$x=\pm۳$

ب) $۲x^۲+۶=۰$

$۲x^۲=-۶\Rightarrow$

$x^۲=-۳\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

ج) $۷-۴x^۲=۲$

$۴x^۲=۵\Rightarrow$

$x^۲=\frac{۵}{۴}\Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{\frac{۵}{۴}}=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۵

الف) $a=۲\ ,\ b=۶\ ,\ c=۵$

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

$$x_۱.x_۲=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۲}$$

ب) $a=۱\ ,\ b=-۳\ ,\ c=-۵$

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$x_۱.x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۱}=-۵$$

۶

$$x_۱=۳x_۲$$

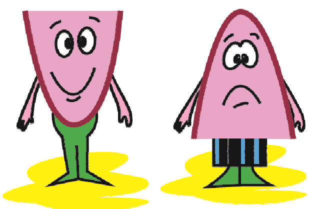
$$x_۱\,x_۲=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x_۲.x_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_۲^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow x_۲=\pm\frac{۱}{۳}$$

چون $x_۲>۰$ است، مقدار منفی آن قابل قبول نیست.

$$x_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_۱=۳\times\frac{۱}{۳}=۱$$

$$x_۱+x_۲=\frac{-۲m}{۳}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۳}=-\frac{۲m}{۳}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{-۲m}{۳}\Rightarrow m=-۲$$

سهمی



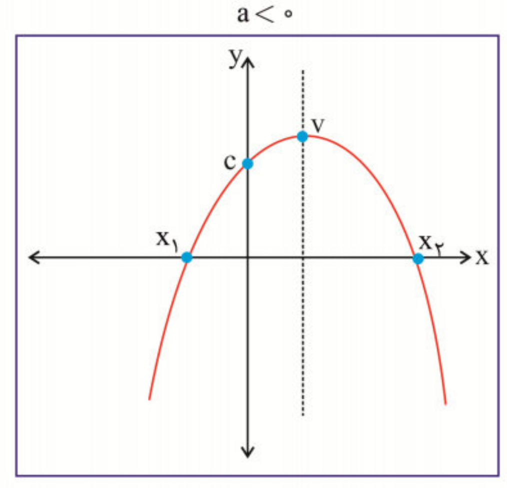
در درس قبل با روش‌های به‌دست آوردن ریشه‌های یک معادله درجه دو آشنا شدید. در ادامه قصد داریم ترسیم نمودار معادله درجه دو را به شما آموزش دهیم.

دقت کنید که نمودار $a\neq ۰$ ، $y=ax^۲+bx+c$ به صورت منحنی است.

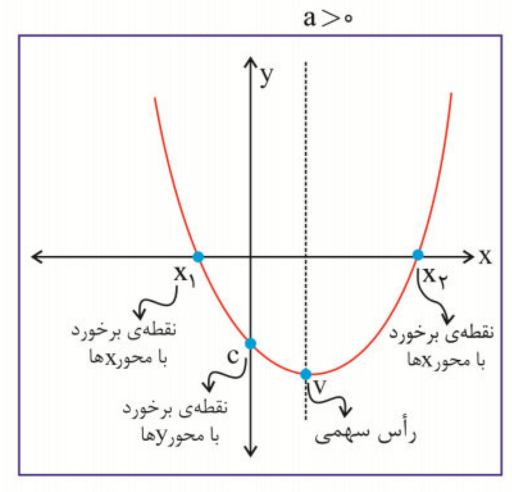
تعریف:

به نمودار معادله $a \neq 0$ ، $y = ax^2 + bx + c$ سهمی گفته می‌شود.

به شکل‌های زیر دقت کنید.



(وقتی $a < 0$، دهانه سهمی به سمت پایین است.)



(وقتی $a > 0$، دهانه سهمی به سمت بالا است.)

ابتدا بهتر است با اجزای سهمی آشنا شوید.

نقطه v که در بالاترین نقطه سهمی یا پایین‌ترین نقطه آن قرار دارد و **رأس سهمی** نامیده می‌شود.

خط عمودی که با نقطه‌چین کشیده شده و از رأس سهمی می‌گذرد، **محور تقارن** سهمی گوییم.

نقاط x_1 و x_2، نقطه‌های برخورد سهمی با محور x هستند. در واقع آن‌ها ریشه‌های معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ به حساب می‌آیند.

نقطه c، نقطه برخورد سهمی با محور y است. (عرض از مبدأ)

رسم نمودار معادله $y = ax^2$

حال این سؤال پیش می‌آید که چگونه می‌توانیم نمودار معادله $y = ax^2$ را رسم کنیم؟

برای رسم نمودار معادله $y = ax^2$، ابتدا جدولی می‌کشیم. سپس به x مقادیر مختلف را می‌دهیم و مقدار y متناظر با آن را به‌دست می‌آوریم.

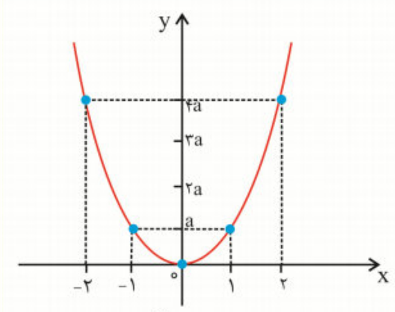
با استفاده از نقاط به دست آمده توسط x و y، نمودار متناظر با معادله را رسم می‌کنیم.

۱)اگر $a>۰$ باشد.

$$x=-\infty \Rightarrow y=+\infty$$
$$x=-۲\Rightarrow y=a(-۲)^{۲}=۴a$$
$$x=-۱\Rightarrow y=a(-۱)^{۲}=a$$
$$x=۰ \Rightarrow y=a(۰)^{۲}=۰$$
$$x=۱ \Rightarrow y=a(۱)^{۲}=a$$
$$x=۲\Rightarrow y=a(۲)^{۲}=۴a$$
$$x=+\infty \Rightarrow y=+\infty$$

توجه کنید که مفهوم $(-\infty,+\infty)$ و $(+\infty,+\infty)$ این است که نمودار از دو طرف ادامه دارد.

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
y	$+\infty$	۴a	a	۰	a	۴a	$+\infty$

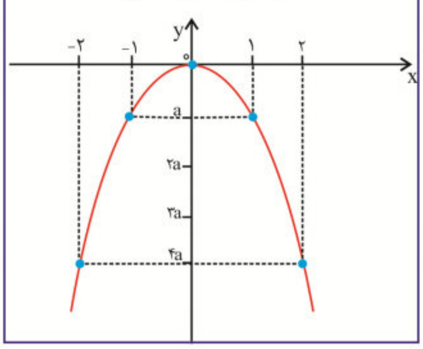


$y=ax^{۲}\ ,\ a>۰$

۲)اگر $a<۰$ باشد.

داریم:

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
y	$-\infty$	۴a	a	۰	a	۴a	$-\infty$

$y=ax^{۲}\ ,\ a<۰$


مشاهده می‌کنید مختصات رأس سهمی $y=ax^{۲}$ نقطه $(۰,۰)$ و محور تقارن آن منطبق بر محور y است (خط $x=۰$).

شکل نمودارهای به‌دست آمده را به خاطر بسپارید.

مثال

نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

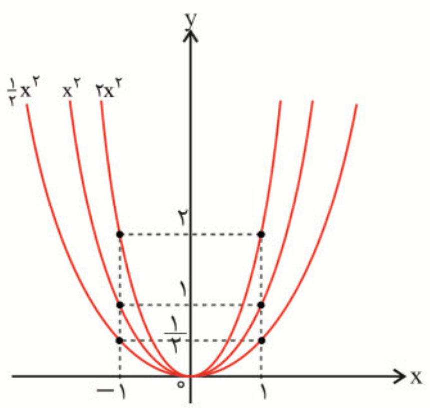
الف) $y=x^{۲}\ ,\ y=۲x^{۲}\ ,\ y=\frac{۱}{۲}x^{۲}$

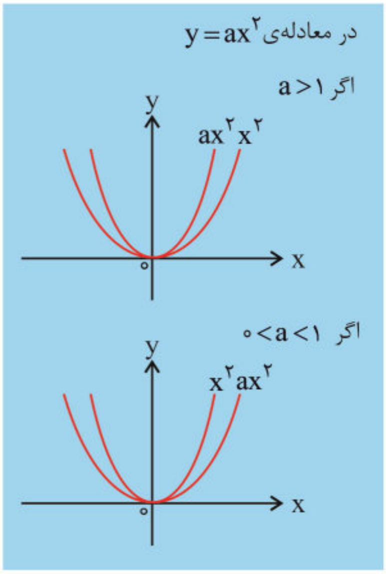
ب) $y=-x^{۲}, y=-۲x^{۲}, y=-\frac{۱}{۲}x^{۲}$

پاسخ

الف)

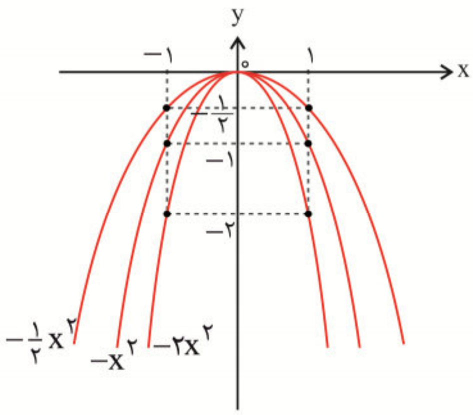
x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
$y=x^{۲}$	$+\infty$	۴	۱	۰	۱	۴	$+\infty$
$y=۲x^{۲}$	$+\infty$	۸	۲	۰	۲	۸	$+\infty$
$y=\frac{۱}{۲}x^{۲}$	$+\infty$	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲	$+\infty$

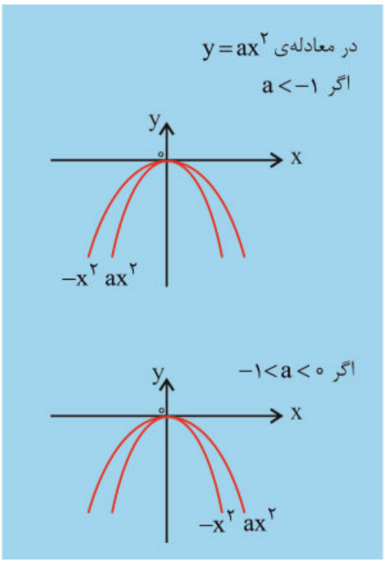




ب)

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
$y=-x^۲$	$-\infty$	-۴	-۱	۰	-۱	-۴	$-\infty$
$y=-۲x^۲$	$-\infty$	-۸	-۲	۰	-۲	-۸	$-\infty$
$y=-\frac{۱}{۲}x^۲$	$-\infty$	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۲	$-\infty$

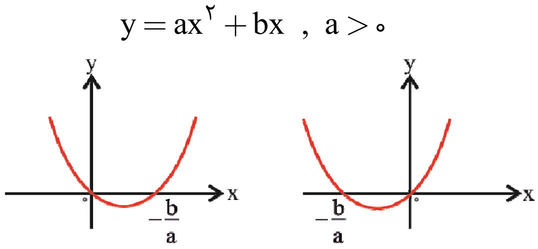


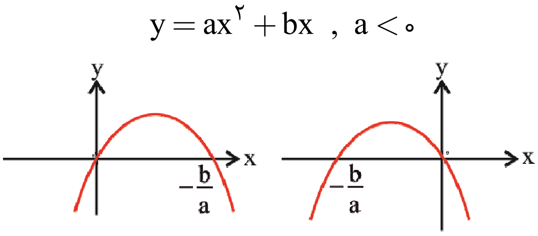


نکته

در معادله $y=ax^۲$، اگر $|a|$ افزایش بیابد، دهانه سهمی باریک‌تر و اگر $|a|$ کم شود، دهانه سهمی عریض‌تر می‌شود.

نمودار معادله $y=ax^۲+bx$ به‌صورت زیر است:





رسم نمودار معادله $y=ax^2+bx+c$

برای رسم نمودار معادله $y=ax^2+bx+c$ مراحل زیر را دنبال کنید.

۱- پیدا کردن مختصات رأس سهمی

۲- پیدا کردن نقاط برخورد با محور x و y

۳- در نهایت با توجه به مختصات به‌دست آمده، سهمی را رسم می‌کنیم.

۱- رأس سهمی

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $y=ax^2+bx+c$ باشد. بنابراین:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

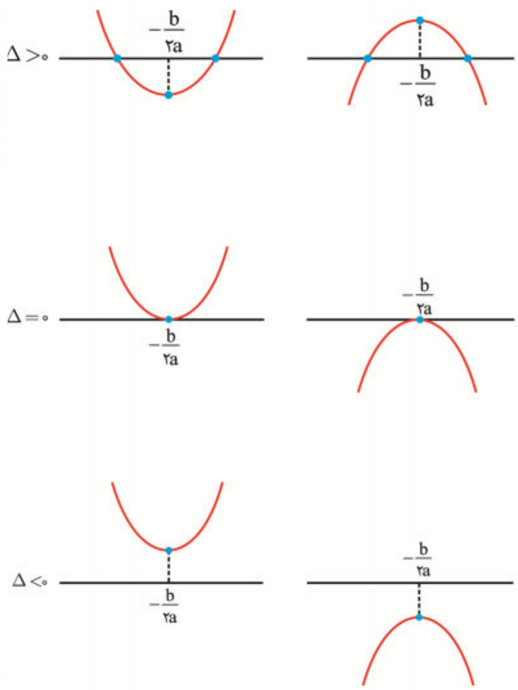
$$=a\left[x^2-x\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)-x\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)+\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{xb+x\sqrt{\Delta}+xb-x\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right]-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=a(x-h)^2+k\ ,\ h=-\frac{b}{2a}\ ,\ k=-\frac{\Delta}{4a}$$

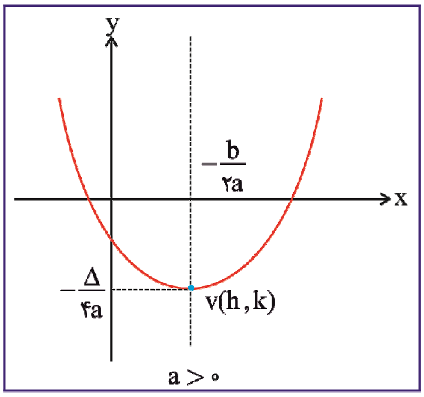


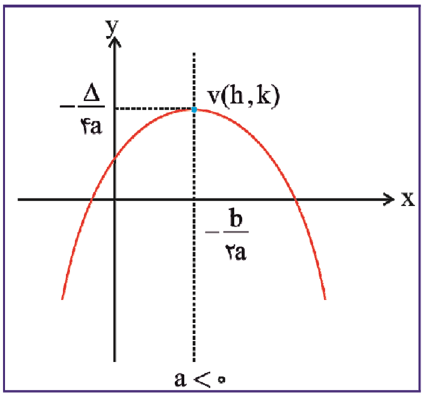
اگر معادله درجه دو $y=ax^2+bx+c$ دارای دو ریشه باشد، مختصات طول رأس آن به صورت $h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید.

عبارت به‌دست آمده فرم مربع کامل معادله درجه دو $y=ax^2+bx+c$ است، که در آن نقطه (h,k) مختصات رأس سهمی است.

با توجه به این مطلب نتیجه می‌گیریم که $x=h$ محور تقارن سهمی است.

دقت کنید که در حالت کلی اگر $a>۰$ باشد، مقدار y در مختصات رأس سهمی (k)، کمترین مقدار معادله درجه دو است و اگر $a<۰$ باشد، مقدار y در مختصات رأس سهمی (k)، بیشترین مقدار معادله درجه دو است.





نکته

نمودار معادله $y=ax^۲+bx+c$، رأسی به مختصات $(-\frac{b}{۲a}\,,\,\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ و خط تقارنی به معادله $x=-\frac{b}{۲a}$ دارد.

مثال

مختصات رأس سهمی و معادله محور تقارن سهمی‌های زیر را پیدا کنید. همچنین بیشترین یا کمترین مقدار آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y=x^۲-۲x-۳$

ب) $y=-x^۲+۴x+۵$

ج) $y=x^۲+۳x+۱$

پاسخ

الف) می‌دانیم که مختصات رأس سهمی به‌صورت $(-\frac{b}{۲a}\,,\,\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ و معادله محور تقارن آن $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

$$V:(-\frac{-۲}{۲\times۱}\,,\,\frac{۴\times۱\times(-۳)-(-۲)^۲}{۴\times۱})=(۱\,,-۴)$$

$x=۱$ محور تقارن و $y=-۴$ کمترین مقدار این سهمی است. (زیرا $a>۰$).

ب)

$$v:(\frac{-۴}{۲(-۱)}\,,\,\frac{۴\times(-۱)\times(۵)-(۴)^۲}{۴\times(-۱)})=(۲,۹)$$

$x=۲$ محور تقارن و $y=۹$ بیشترین مقدار این سهمی است. (زیرا $a<۰$).

ج)

$$v:(-\frac{۳}{۲\times۱}\,,\,\frac{۴\times(۱)\times(۱)-۳^۲}{۴\times۱})=(-\frac{۳}{۲}\,,-\frac{۵}{۴})$$

$x=\frac{-۳}{۲}$ محور تقارن و $y=-\frac{۵}{۴}$ کمترین مقدار این سهمی است. $(a>۰)$

مثال

اگر خط $3x+1=0$ محور تقارن سهمی $y=-2x^2+mx-1$ باشد، بیشترین مقدار این سهمی چقدر است؟

پاسخ

محور تقارن سهمی $\quad 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$$h=-\frac{1}{3}=-\frac{b}{2a}=-\frac{m}{2\times(-2)} \Rightarrow m=\frac{-4}{3}$$

با توجه به این که $a=-2<0$ ، این سهمی دارای بیشترین مقدار است.

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-2)(-1)-(-\frac{4}{3})^2}{4(-2)}=-\frac{7}{9}$$

کمترین مقدار عبارت $y=x^2-8x+n$ عدد -4 است. مقدار n را به‌دست آورید.

۲- نقاط برخورد با محور x و y

معادله درجه دو $a\neq 0$ و $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید.

۱) اگر $x=0$ باشد، $y=c$ می‌شود و نقطه $(0,c)$، نقطه برخورد این سهمی با محور yها نامیده می‌شود. به این معنی که نمودار این چندجمله‌ای محور yها را در نقطه $(0,c)$ قطع می‌کند.

۲) اگر $y=0$ باشد، $ax^2+bx+c=0$ می‌شود. فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، نقطه‌های $(x_1,0)$ و $(x_2,0)$، نقاط برخورد این سهمی با محور xها هستند. یعنی نمودار این سهمی محور xها را در نقاط $(x_1,0)$ و $(x_2,0)$ قطع می‌کند.

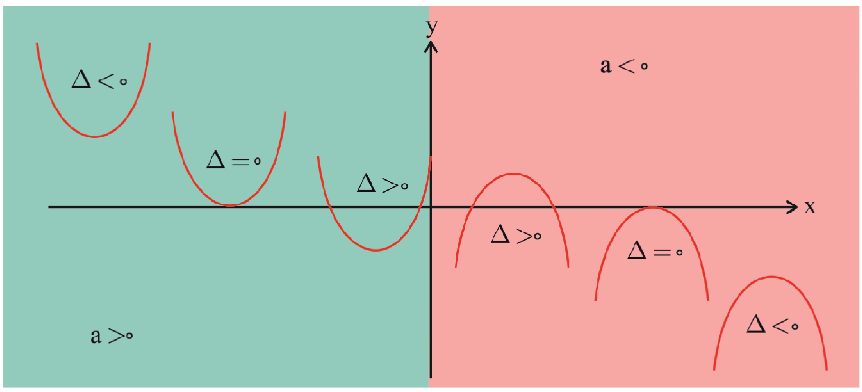
می‌دانید برای ریشه‌های معادله درجه دو، سه حالت وجود دارد، حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱- اگر $\Delta>0$ باشد، سهمی در دو نقطه‌ی مجزا محور x را قطع می‌کند.

۲- اگر $\Delta=0$ باشد، سهمی فقط در یک نقطه بر محور x مماس می‌شود.

۳- اگر $\Delta<0$ باشد، سهمی با محور x هیچ نقطه برخوردی ندارد.

به شکل زیر دقت کنید.



مثال

نقطه برخورد با محور x و y را در هر یک از معادلات زیر به‌دست آورید.

الف) $y=x^{۲}-۹$

ب) $y=-۴x^{۲}+۵x$

ج) $y=x^{۲}+۳x+۷$

د) $y=۴x^{۲}+۲۰x+۲۵$

پاسخ

الف) $x=۰\Rightarrow y=-۹\Rightarrow(۰,-۹)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰\Rightarrow x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x_{۱}=-۳\ ,\ x_{۲}=۳$

در نتیجه نقطه‌های $(۳,۰)$ و $(-۳,۰)$، نقاط برخورد با محور x هستند.

ب) $x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow(۰\ ,۰)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰\Rightarrow -۴x^{۲}+۵x=۰\Rightarrow x_{۱}=۰\ \ ,\ x_{۲}=\frac{۵}{۴}$

نقطه‌های $(۰,۰)$ و $(\frac{۵}{۴}\ ,\ ۰)$، نقاط برخورد با محور x هستند.

ج) $x=۰\Rightarrow y=۷\Rightarrow(۰,۷)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰\Rightarrow x^{۲}+۳x+۷=۰$

$\Delta=۳^{۲}-۴\times۱\times۷=-۱۹<۰$

این سهمی در هیچ نقطه‌ای محور x را قطع نمی‌کند.

د) $x=۰\Rightarrow y=۲۵\ \Rightarrow(۰,۲۵)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰\Rightarrow ۴x^{۲}+۲۰x+۲۵=۰$

$\Delta=۲۰^{۲}-۴\times۴\times۲۵=۰\Rightarrow x_{۱}=x_{۲}=\frac{-۲۰}{۸}=-\frac{۵}{۲}$

سهمی در نقطه $(-\frac{۵}{۲},۰)$ بر محور x مماس می‌شود.

عبارت $y=x^{۲}+(m+۲)x+۵+m$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار این سهمی در یک نقطه بر محور x مماس شود، مقدار m را به‌دست آورید.

۳- رسم منحنی

برای رسم منحنی $a\neq۰$ و $y=ax^{۲}+bx+c$ مراحل زیر را انجام دهید.

۱- به علامت a دقت کنید.

اگر $a>۰$ باشد، نمودار سهمی دارای کمترین مقدار است و دهانه آن به سمت بالا است.

اگر $a<۰$ باشد، نمودار سهمی دارای بیشترین مقدار است و دهانه آن به سمت پایین است.

۲- مختصات رأس سهمی را بیابید، یعنی نقطه $V:(h,k)$.

۳- نقاط برخورد با محور x و y را مشخص کنید.

۴- نمودار سهمی را رسم کنید.

مثال

نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=x^{۲}-۳x-۱۰$

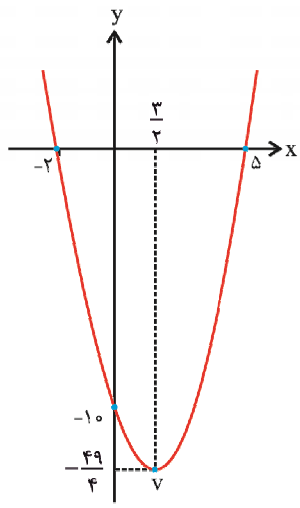
ب) $y=x^{۲}+۴x+۵$

ج) $y=-۲x^{۲}-۸x$

د) $y=x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۲$

پاسخ

الف) $a=۱>۰$ ، پس دهانه‌ی سهمی به سمت بالا است.



$$h=-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۲}$$

$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(۱)(-۱۰)-(-۳)^{۲}}{۴(۱)}=-\frac{۴۹}{۴}$$

$V:(\frac{۳}{۲},\frac{-۴۹}{۴})$ مختصات رأس سهمی

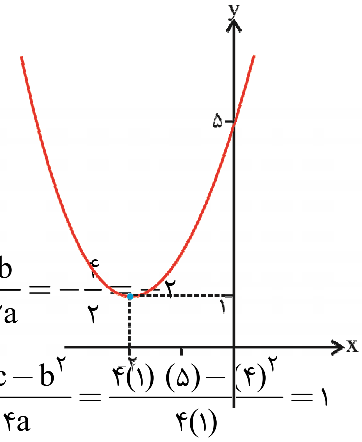
$x=۰:\quad y=-۱۰\ ,(۰\ ,\ -۱۰)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰:\quad x^{۲}-۳x-۱۰=۰\Rightarrow(x-۵)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۵\ ,\ x=-۲$

$(۵\ ,\ ۰)\ ,\ (-۲,۰)$ نقاط برخورد با محور x

ب)

$a=۱>۰$، پس دهانه سهمی به سمت بالا است.



$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

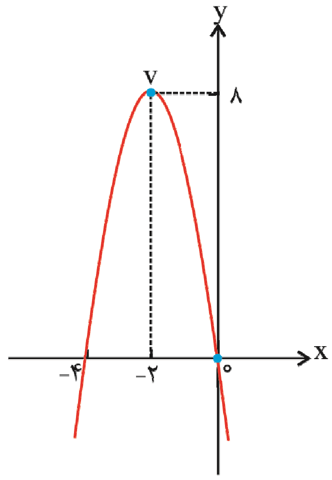
$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(۱)\ (۵)-(۴)^{۲}}{۴(۱)}=۱$$

$V:(-۲,۱)$ مختصات رأس سهمی

$x=۰\Rightarrow y=۵\ \ (۰\ ,\ ۵)$ نقطه برخورد با محور y

$\Delta=۴^{۲}-۴(۱)(۵)=-۴<۰$ سهمی محور x را قطع نمی‌کند.

ج) $a=-۲<۰$، بنابراین دهانه سهمی به سمت پایین است.



$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۸}{۲(-۲)}=-۲$$

$$k=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۲)(۰)-(-۸)^۲}{۴(-۲)}=۸$$

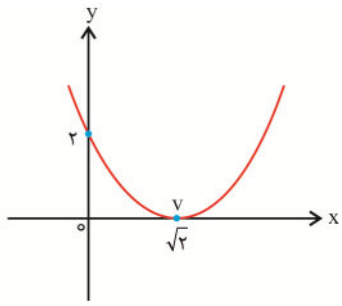
$V:(-۲,۸)$ مختصات رأس سهمی

$x=۰ \Rightarrow y=۰ \quad (۰\,,\,۰)$ نقطه برخورد با محور y

$$y=۰ \Rightarrow -۲x^۲-۸x=۰ \Rightarrow -۲x(x+۴)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,x=-۴$$

$(۰,۰\,)\,,\,(-۴\,,۰)$ نقاط برخورد با محور x

د) $a=۱>۰$، پس دهانه سهمی به سمت بالا است.



$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲\sqrt{۲}}{۲\times(۱)}=\sqrt{۲}$$

$$k=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(۱)(۲)-(-۲\sqrt{۲})^۲}{۴(۱)}=۰$$

$x=۰ \Rightarrow y=۲ \quad (۰,۲)$ نقطه برخورد با محور y

$$y=۰ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۲}x+۲=۰ \Rightarrow (x-\sqrt{۲})^۲=۰$$

$$x_۱=x_۲=\sqrt{۲}$$

$(\sqrt{۲},۰)$ نقطه مماس بر محور x

انتقال سهمی

معادله سهمی $y=x^۲$ را در نظر بگیرید.

الف) انتقال عمودی

$y=x^۲+k$ $\begin{cases} k>۰ \\ k<۰ \end{cases}$

نمودار سهمی به اندازه‌ی $|k|$ واحد در راستای محور y بالا می‌رود.

نمودار سهمی به اندازه‌ی $|k|$ واحد در راستای محور y پایین می‌رود.

شکل(۱)

ب) انتقال افقی

$y=(x+h)^۲$ $\begin{cases} h>۰ \\ h<۰ \end{cases}$

نمودار سهمی به اندازه‌ی $|h|$ واحد به سمت چپ می‌رود.

نمودار سهمی به اندازه‌ی $|h|$ واحد به سمت راست می‌رود.

شکل(۲)

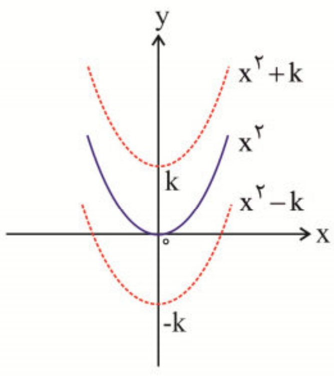
ج) انعکاس سهمی

$y=-x^۲$ نمودار سهمی نسبت به محور x قرینه می‌شود. شکل(۳)

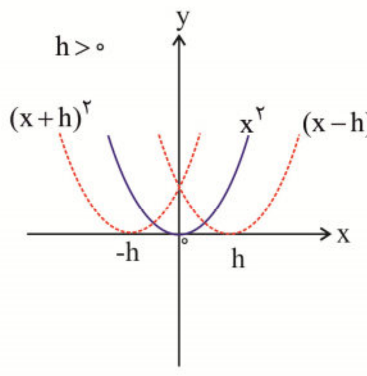
د) انتقال عمودی و افقی

$y=(x+h)^۲+k$، نمودار سهمی به اندازه $|k|$ واحد در راستای محور y به سمت بالا یا پایین جابه‌جا می‌شود.

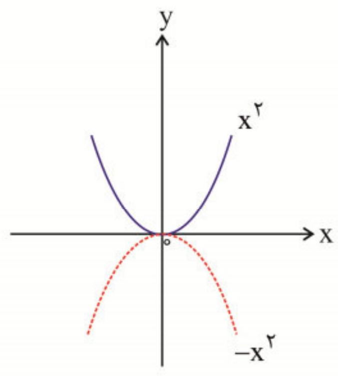
و به اندازه $|h|$ واحد در راستای محور x به سمت چپ یا راست می‌رود.



شکل(۱)



شکل(۲)



شکل(۳)

مثال

نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را با استفاده از روش انتقال رسم کنید.

الف) $y=x^۲+۳$

ب) $y=x^۲-۳$

ج) $y=(x-۳)^۲$

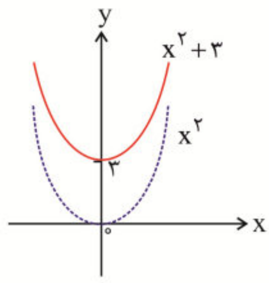
د) $y=(x+۳)^۲$

ن) $y=-(x-۴)^۲$

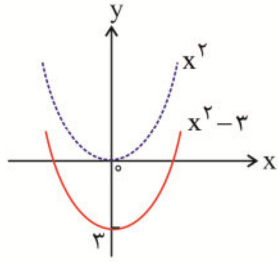
و) $y=(x+۲)^۲-۳$

هـ) $y=-(x-۲)^۲+۱$

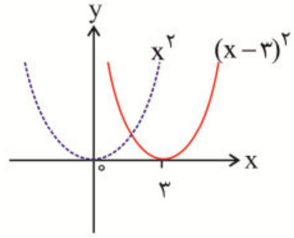
پاسخ



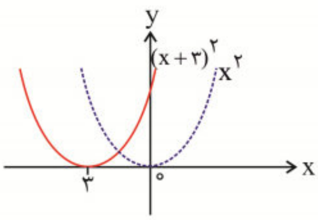
(الف)



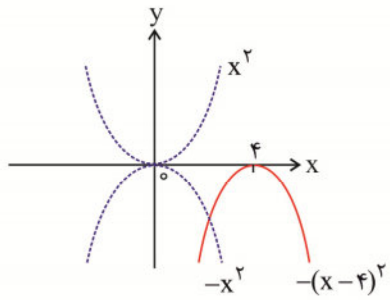
(ب)



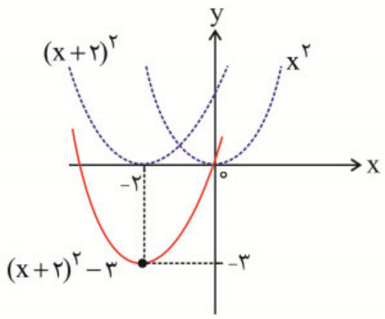
(ج)



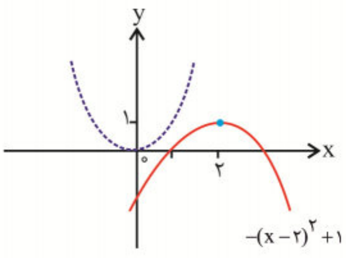
(د)



(ن)



(و)



(هـ)

به‌دست آوردن معادله سهمی

تاکنون آموختیم که چگونه نمودار یک سهمی را رسم کنیم. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر نمودار یک سهمی را داشته باشیم، چگونه معادله آن را به‌دست آوریم؟

روش‌های مختلفی برای رسیدن به این هدف وجود دارد. استفاده از این روش‌ها بستگی به داده‌های مسأله دارد.

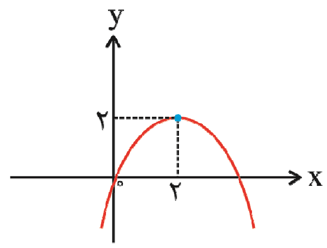
اگر نقطه رأس سهمی $(V:(h,k))$ داده شده باشد، می‌توانیم برای به‌دست آوردن این معادله از فرمول $y=a(x-h)^۲+k$ استفاده کنیم. (البته باید یک نقطه دیگر از سهمی را نیز داشته باشیم.)

اگر ریشه‌های سهمی را داشته باشیم می‌توانیم از فرمول $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ برای به‌دست آمدن معادله سهمی استفاده کنیم. ضمنا باید یک نقطه دیگر از سهمی را نیز داشته باشیم.

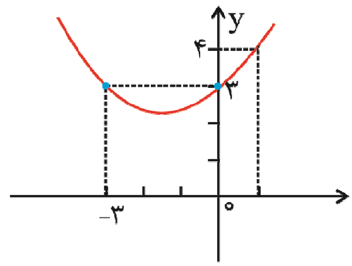
اگر سه‌نقطه دلخواه از سهمی را داشته باشیم: می‌توانیم از فرمول $y=ax^۲+bx+c$ برای رسیدن به هدف مورد نظر استفاده کنیم.

مثال

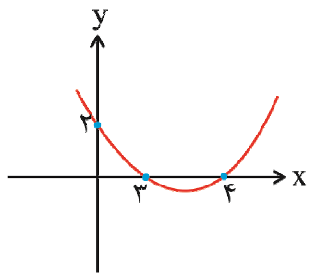
معادله هر یک از سهمی‌های زیر را بنویسید.



(الف)



(ب)



(ج)

پاسخ

الف) رأس سهمی نقطه $V=(2,2)$ است، بنابراین داریم:

$$y=a(x-2)^2+2$$

همچنین می‌بینیم که سهمی از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد. بنابراین این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کند. پس:

$$0=a(0-2)^2+2 \Rightarrow 0=4a+2 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+2x$$

ب) فرض کنید معادله سهمی $y=ax^2+bx+c$ باشد. همان‌طور که در شکل می‌بینیم سهمی از نقاط $(0,3)$، $(-3,3)$ و $(1,4)$ می‌گذرد. بنابراین این نقاط در معادله سهمی صدق می‌کنند.

$$(0,3) \quad : \quad 3=c$$

$$(-3,3) \quad : \quad 3=9a-3b+3 \Rightarrow 9a-3b=0$$

$$(1,4) \quad : \quad 4=a+b+3 \Rightarrow a+b=1$$

$$\begin{cases} 9a-3b=0 & (1) \\ a+b=1 & (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow a=\frac{1}{4} \quad , \quad b=\frac{3}{4}$$

بنابراین معادله این سهمی به‌صورت زیر است:

$$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+3$$

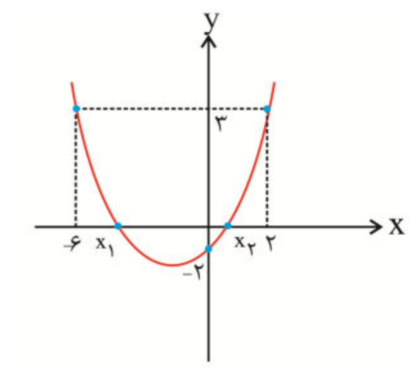
ج) از آنجایی‌که نقاط $(3,0)$ و $(4,0)$ ریشه‌های سهمی موردنظر هستند پس فرض می‌کنیم معادله سهمی $y=a(x-3)(x-4)$ باشد، نقطه $(0,2)$ روی سهمی قرار دارد. بنابراین:

$$2=a(0-3)(0-4) \Rightarrow a=\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{1}{6}(x-3)(x-4)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{6}x+2$$

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های سهمی زیر باشند، مقدار $x_۱+x_۲$ را به‌دست آورید.



پاسخ مثال

داریم:

$$-۴=\frac{۴(۱)(n)-(-۸)^۲}{۴(۱)}\Rightarrow n=۱۲$$

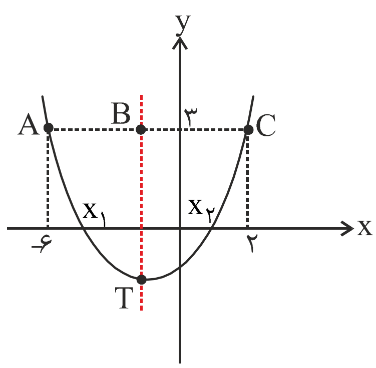
$$\Delta=(m+۲)^۲-۴(۵+m)=m^۲-۱۶$$

$$\Delta=m^۲-۱۶=۰\Rightarrow m=\pm ۴$$

مقدار y این سهمی در نقطه ۲+ و ۶- برابر است.

$$AB=BC\Rightarrow h=\frac{-۶+۲}{۲}=-۲$$

$$h=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow\frac{x_۱+x_۲}{۲}=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=-۴$$



تعیین علامت

همان‌طور که می‌دانیم یک معادله، گزاره‌ای است که نشان می‌دهد دو عبارت با هم برابرند.

به عنوان مثال $a=b$ یک معادله است.

در حل مسائل تنها آگاهی از معادلات کافی نیست و گاهی لازم است که از نامعادلات نیز استفاده کنیم، بنابراین آشنایی با آن‌ها الزامی است.

به عبارات زیر دقت کنید:

الف) قیمت ماشین علی بیشتر از ۲۰ میلیون تومان نیست. $(x \leq ۲۰۰۰۰۰۰۰)$

ب) جرم سارا کمتر از ۶۰ کیلوگرم است. $(y < ۶۰)$

ج) حقوق احمد بیشتر از دو میلیون تومان است. $(z > ۲۰۰۰۰۰۰)$

آیا می‌توانید مسئله زیر را حل کنید.

نمره زبان زهرا در سه امتحان اول ۸۶، ۸۸ و ۷۸ (از ۱۰۰) شده است. اگر او بخواهد بعد از امتحان چهارم میانگین نمره‌هایش حداقل ۸۰ باشد، در امتحان چهارم باید حداقل چه نمره‌ای کسب کند؟

فرض کنیم نمره زهرا در امتحان چهارم x باشد.

$$\frac{۷۸+۸۸+۸۶+x}{۴} \geq ۸۰ \Rightarrow ۷۸+۸۸+۸۶+x \geq ۳۲۰ \Rightarrow ۲۵۲+x \geq ۳۲۰$$

$$\Rightarrow x-۶۸ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۶۸$$

یعنی زهرا در امتحان چهارم باید حداقل نمره ۶۸ را کسب کند.

یادآوری

به جدول زیر توجه کنید:

بازه	نامساوی	نمودار هندسی
$(-\infty, a)$	$x < a$	a
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	a
$(a, +\infty)$	$x > a$	a
$[a, +\infty)$	$x \geq a$	a
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	a b
$[a, b)$	$a \leq x < b$	a b
$(a, b]$	$a < x \leq b$	a b
(a, b)	$a < x < b$	a b
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	۰

نامساوی خطی

تعریف

یک نامساوی خطی، نامساوی است که می‌تواند به شکل‌های زیر نوشته شود.

$$ax+b>۰ \quad , \quad ax+b<۰$$

$$ax+b\geq ۰ \quad , \quad ax+b\leq ۰$$

دقت کنید که $a\,،b\in\mathbb{R}$ و $a\neq ۰$ است.

لازم است بدانید اگر دو طرف نامساوی را در یک عدد منفی، ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی باید عوض شود.

توجه کنید که منظور از حل کردن یک نامعادله، پیدا کردن مقدار یا محدوده متغیر آن (x) است.

مثال

نامعادلات زیر را حل کنید و جواب به‌دست آمده را روی نمودار نمایش دهید.

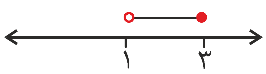
الف) $۲x+۳\leq ۵x$

ب) $۲<۳x-۱\leq ۸$

پاسخ

الف) $۲x+۳\leq ۵x \Rightarrow -۳x\leq -۳ \Rightarrow x\geq ۱ \qquad [۱\,,+\infty)$

ب) $۲<۳x-۱\leq ۸ \Rightarrow ۳<۳x\leq ۹ \Rightarrow ۱<x\leq ۳ \qquad (۱,۳]$

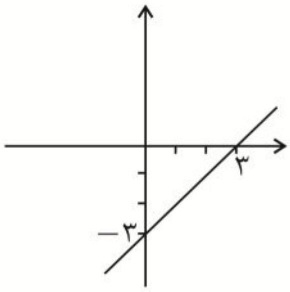


جدول تعیین علامت

در حالت کلی، برای حل یک نامعادله خطی مانند $ax+b>۰$ یا $ax+b\leq ۰$، لازم است که علامت چندجمله‌ای $a\neq ۰$ و $ax+b$ را بدانیم.

مثال

نمودار خط $y=x-۳$ در شکل زیر رسم شده است. آیا می‌توانید با استفاده از آن، علامت y را در جدول داده شده، بنویسید:



x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$y=x-۳$	?	۰	?

پاسخ

همان‌طور که روی نمودار مشاهده می‌کنید، هنگامی‌که $x>۳$ است، مقدار y مثبت است و هنگامی‌که $x<۳$ است، مقدار y منفی می‌شود. مثلاً :

$$x>۳ : x=۴ \quad \Rightarrow y=۴-۳=۱>۰$$
$$x<۳ : \ x=۲ \quad \Rightarrow y=۲-۳=-۱<۰$$

در نتیجه داریم:

x	$x<۳$	۳	$x>۳$
$y=x-۳$	$-$	۰	$+$

برای تعیین علامت چندجمله‌ای $ax+b, a\neq ۰$ مراحل زیر را دنبال کنید:

۱) ریشه چندجمله‌ای را به‌دست آورید.

$$ax+b=۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

۲) جدولی به نام جدول تعیین علامت، به صورت زیر رسم کنید.

x	$x<-\frac{b}{a}$	$x=-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$ax+b$	علامت $ax+b$ مخالف علامت a است.	۰	علامت $ax+b$ با علامت a یکی است.

مشاهده می‌کنید که جدول تعیین علامت نشان می‌دهد:

اگر $x\in(-\infty,-\frac{b}{a})$ باشد، علامت چندجمله‌ای مخالف علامت a است.

اگر $x \in (-\frac{b}{a}, +\infty)$ باشد، علامت چندجمله‌ای با علامت a یکی است.

مثال

نامعادله $۳x-۲ \geq ۰$ را حل کنید.

پاسخ

ابتدا ریشه $۳x-۲=۰$ را پیدا می‌کنیم.

$$۳x-۲=۰ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$	$x=\frac{۲}{۳}$	$+\infty$
$۳x-۲$	$-$	۰	$+$

داریم:

اگر $x \in (-\infty, \frac{۲}{۳})$ باشد، $۳x-۲$ منفی است.

اگر $x \in (\frac{۲}{۳}, +\infty)$ باشد، $۳x-۲$ مثبت است.

چون هدف ما یافتن x هایی است که به‌ازای آن $۳x-۲ \geq ۰$، می‌باشد پس $x \in [\frac{۲}{۳}, +\infty)$.

مثال

نامساوی $۶-۲x \geq ۰$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل کنید.

پاسخ

$$۶-۲x=۰ \Rightarrow x=۳$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$۶-۲x$	$+$	۰	$-$

چون $۶-۲x \geq ۰$ مدنظر است، پس جواب نامعادله $x \in (-\infty, ۳]$ خواهد بود.

نامساوی‌های زیر را با استفاده از جدول تعیین علامت حل کنید.

الف) $5-2x<0$

ب) $\frac{x+14}{6}-\frac{x-12}{8}\le 3$

ج) $6x+(x-2)(x+2)\ge(x+4)^2$

نامعادله درجه دو

نامعادله‌ای که می‌تواند به یکی از شکل‌های زیر نوشته شود را یک نامعادله درجه دو می‌گوییم.

$$ax^2+bx+c>0 \quad , \quad ax^2+bx+c<0$$

$$ax^2+bx+c\ge 0 \quad , \quad ax^2+bx+c\le 0$$

دقت کنید که $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ است.

تاکنون آموختید که چگونه یک نامعادله خطی را حل کنید. حال این سؤال پیش می‌آید که مجموعه جـواب یـک نامعادلـه درجه دو را چگونه به‌دست آوریم؟

به عنوان مثال نامعادله زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2-5x\ge -6$$

برای حل این نامعادله ابتدا آن را به صورت زیر می‌نویسیم. (طوری که فقط ۰ در سمت راست باشد.)

$$x^2-5x+6\ge 0$$

نکته

دقت کنید که اگر علامت $\le$ یا $\ge$ در نامعادله‌ها استفاده شود، ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دو نیـز جـزء جـواب‌هـای آن نامعادله هستند. (چرا؟)

بنابراین ابتدا ریشه‌های x^2-5x+6 را می‌یابیم.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=3$$

در ادامه جدول تعیین علامت را برای هرکدام از فاکتورهای خطی $x-2$ و $x-3$ این چندجمله‌ای رسم می‌کنیم و حاصل آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

x	$-\infty$	۲		۳	$+\infty$
$x-2$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	۰	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$+\times+=+$
$+\times-=-$
$-\times+=-$
$-\times-=+$

با توجه به این که $x^{۲}-۵x+۶\geq ۰$ است، بنابراین قسمت‌های مثبت، مجموعه جواب این نامعادله است.

مجموعه جواب کلی این نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty,۲]\cup[۳,+\infty)$$

دقت کنید منظور از حل کردن یک نامعادله، پیدا کردن مقدار یا محدوده مجهول آن (x) است.

جالب است بدانید که تنها در یک مرحله نیز می‌توان چندجمله‌ای درجه دو را تعیین علامت کرد و مجموعه جواب آن را به‌دست آورد.

برای این منظور مراحل زیر را دنبال کنید.

- اگر $\Delta<۰$ باشد، همواره علامت چندجمله‌ای $ax^{۲}+bx+c$ با علامت a یکسان است.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^{۲}+bx+c$	هم‌علامت با a	

- اگر $\Delta=۰$ باشد، چندجمله‌ای $ax^{۲}+bx+c$ هم علامت با a است، اما باید ریشه‌های چندجمله‌ای را در نظر بگیریم.

x	$-\infty$	$x_{۱}=x_{۲}=-\frac{b}{۲a}$	$+\infty$
$ax^{۲}+bx+c$	هم علامت با a	۰	هم علامت با a

- اگر $\Delta>۰$ باشد، چندجمله‌ای $ax^{۲}+bc+c$، در بین ریشه‌ها مخالف علامت a و در بقیه بازه‌ها هم علامت با a است.

x	$-\infty$	$x_{۱}$		$x_{۲}$	$+\infty$
$ax^{۲}+bx+c$	هم علامت با a	۰	مخالف علامت a	۰	هم علامت با a

مثال

نامعادله $-x^{۲}-۴<-۵x$ را حل کنید.

پاسخ

$$-x^{۲}-۴<-۵x\Rightarrow -x^{۲}+۵x-۴<۰$$
$$-x^{۲}+۵x-۴=۰\Rightarrow(-x+۴)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ x=۱$$

x		۱		۴	
$-x^{۲}+۵x-۴$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$x\in(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$$

۲) نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $۳x+۴\geq x^{۲}$

ب) $x(x+۲)>۳۵$

ج) $۹x^{۲}-۱۲x+۴\leq ۰$

د) $x^{۲}-\frac{۲x-۱}{۴}<۰$

۳) معادله $x^{۲}+۲(m+۱)x+۱=۰$ را در نظر بگیرید. برای کدام مقدار m این معادله

الف) ریشه حقیقی ندارد.

ب) ریشه مضاعف دارد.

ج) دو ریشه مجزا دارد.

۴) نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $(۳-x)(x^{۳}-۲x^{۲}-۸x)(x^{۲}+۳)<۰$

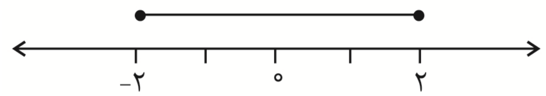
ب) $\frac{(۳x+۲)(x-۵)}{x(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}\geq ۰$

ج) $\frac{(x^{۲}-x-۶)(x-۱)^{۱۷}}{x^{۸}(۱-x^{۲})^{۵۵}}\leq ۰$

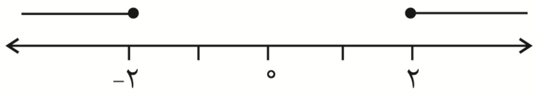
۵) نامعادله $\frac{|۲x^{۲}+۳x-۲|\,(۱-x^{۲})}{(x^{۲}+۳x)\,|x-۲|}\leq ۰$ را حل کنید.

نامعادله‌های قدرمطلقی

می‌دانیم $|x|$ با $|x-۰|$ برابر است و به معنی فاصله x از نقطه صفر روی مبدأ است.
بنابراین وقتی می‌نویسیم $|x|\le ۲$ ، یعنی مجموعه نقاطی که فاصله آن‌ها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد، نمودار هندسی آن به صورت زیر است:



یعنی $-۲\le x\le ۲$، به عنوان مثال $|۱/۵-۰|=۱/۵<۲$.
به همین ترتیب وقتی می‌نویسیم $|x|\ge ۲$ ، یعنی تمام نقاطی که فاصله آن‌ها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد، نمودار هندسی آن را مشاهده کنید.



یعنی $x\ge ۲$ یا $x\le -۲$.
به عنوان مثال $|۳-۰|=۳>۲$

تعریف:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و U یک عبارت جبری باشد، در این صورت:
۱) اگر $|U|\le a$ ، آن‌گاه $-a\le U\le a$.
۲) اگر $|U|\ge a$ ، آن‌گاه $U\ge a$ یا $U\le -a$.

مثال

نامعادله‌های زیرا را حل کنید:

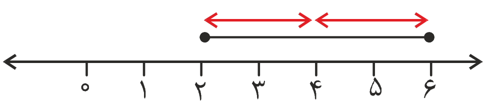
الف) $|x-۴|\le ۲$

ب) $|x+۱|\ge ۳$

پاسخ

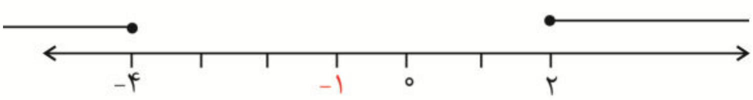
نامعادله (الف) یعنی مجموعه نقاطی مانند (x) که فاصله آن‌ها از نقطه ۴ کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد.

$$|x-۴|\le ۲ \Rightarrow -۲\le x-۴\le ۲ \Rightarrow -۲+۴\le x\le ۲+۴ \Rightarrow ۲\le x\le ۶$$



نامعادله (ب) یعنی مجموعه نقاطی مانند (x) که فاصله آن‌ها از نقطه (۱-) بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد.

$$|x-(-۱)|\ge ۳ \Rightarrow x+۱\ge ۳ \quad \text{یا} \quad x+۱\le -۳ \Rightarrow x\ge ۲ \quad \text{یا} \quad x\le -۴$$



دستگاه نامعادلات

به دستگاهی که شامل چند نامعادله باشد، دستگاه نامعادلات گوییم.

برای حل یک دستگاه نامعادلات، هر کدام از نامعادلات آن را جداگانه حل می‌کنیم، سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

مثال

نامعادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲} - ۷x - ۸ > ۰ \\ x^{۲} - ۴x + ۳ > ۰ \end{cases}$$

پاسخ

هر کدام از چندجمله‌ای‌ها را تعیین علامت می‌کنیم:

$۱)\ x^{۲} - ۷x - ۸ > ۰$

$x^{۲} - ۷x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = -۱ , x = ۸$

$۲)\ x^{۲} - ۴x + ۳ > ۰$

$x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad , \quad x = ۳$

x	$-\infty$ تا ۱-	۱-	۱- تا ۱	۱	۱ تا ۳	۳	۳ تا ۸	۸	۸ تا $+\infty$
(۱)	+	۰	−		−		−	۰	+
(۲)	+		+	۰	−	۰	+		+
دستگاه نامعادله	+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+

می‌بینیم که هر دو چندجمله‌ای در ناحیه‌های مشخص شده بزرگ‌تر از صفر هستند، پس:

$x \in (-\infty , -۱) \cup (۸ , +\infty)$

دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{x^{۲} + x - ۴}{x} < ۱ \\ x^{۲} < ۶۴ \end{cases}$$

نامعادله $\sqrt{۲x - ۱} < x + ۲$ را حل کنید.

نامعادله $\sqrt{x^۲+x-۲} > x$ را حل کنید.

پاسخ مثال

الف) $۵-۲x=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$

x	$-\infty$		$\frac{۵}{۲}$		$+\infty$
$۵-۲x$		+	۰	−	

$۵-۲x<۰ \Rightarrow x>\frac{۵}{۲} : (\frac{۵}{۲}, +\infty)$

ب) $\frac{x+۱۴}{۶}-\frac{x-۱۲}{۸} \leq ۳ \Rightarrow \frac{۴x+۵۶-۳x+۳۶}{۲۴} \leq ۳$

$x+۹۲ \leq ۷۲ \Rightarrow x+۲۰ \leq ۰$

داریم:

$x+۲۰=۰ \Rightarrow x=-۲۰$

x	$-\infty$		-۲۰		$+\infty$
$x+۲۰$		−	۰	+	

$x \in (-\infty, -۲۰]$

ج) $۶x+(x-۲)(x+۲) \geq (x+۴)^۲$

$\Rightarrow ۶x+x^۲-۴ \geq x^۲+۸x+۱۶ \Rightarrow -۲x-۲۰ \geq ۰$

داریم:

$-۲x-۲۰=۰ \Rightarrow x=-۱۰$

x	$-\infty$		-۱۰		$+\infty$
$-۲x-۲۰$		+	۰	−	

$x \in (-\infty, -۱۰]$

الف) $۳x+۴\geq x^۲ \Rightarrow -x^۲+۳x+۴\geq ۰$

$-x^۲+۳x+۴=۰$

$\Delta=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow x_۱=-۱\ ,\ x_۲=۴$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
$-x^۲+۳x+۴$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$x\in[-۱\ ,۴]$

ب) $۳۵<x(x+۲)\Rightarrow -x^۲-۲x+۳۵<۰$

$\Delta=۴+۱۴۰=۱۴۴\Rightarrow x_۱=-۷, x_۲=-۵$

x	$-\infty$		-۷		-۵		$+\infty$
$-x^۲+۳x+۴$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$x\in(-\infty,-۷)\cup(-۵,+\infty)$

ج) $۹x^۲-۱۲x+۴\leq ۰$

$\Delta=۱۴۴-۱۴۴=۰\ \ ,\ x_۱=x_۲=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}$

x	$-\infty$		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$۹x^۲-۱۲x+۴$		$+$	۰	$+$	

بنابراین تنها $x=\frac{۲}{۳}$ مجموعه جواب است.

د) $x^۲-\frac{۲x-۱}{۴}<۰\Rightarrow ۴x^۲-۲x+۱<۰$

$\Delta=۴-۱۶=-۱۲<۰$

x	$-\infty$		$+\infty$
$۴x^۲-۲x+۱$		$+$	

مجموعه جواب این نامعادله تهی است، زیرا همواره مثبت است.

۳

داریم:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۲(m+۱))^{۲} - ۴(۱)(۱) = ۴m^{۲} + ۸m + ۴ - ۴ = ۴m^{۲} + ۸m$$

$۴m^{۲} + ۸m = ۰ \Rightarrow m = -۲$ یا $m = ۰$

جدول تعیین علامت را برای Δ رسم می‌کنیم.

m	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
$۴m^{۲}+۸m$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

حال می‌بینیم که:

الف) اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد، پس $m \in (-۲, ۰)$.

ب) اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف است، پس $m = -۲$ یا $m = ۰$.

ج) اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی است، پس $m \in (-\infty, -۲) \cup (۰, +\infty)$.

۴

برای پیدا کردن مجموعه جواب این نامعادلات، ابتدا صفرهای چندجمله‌ای داده شده را پیدا می‌کنیم. سپس علامت هر کدام از چندجمله‌ای‌ها را به دست می‌آوریم و در نهایت آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

الف) $(۳-x)(x^{۳}-۲x^{۲}-۸x)(x^{۲}+۳) = (۳-x)x(x^{۲}-۲x-۸)(x^{۲}+۳)$

$۳ - x = ۰ \Rightarrow x = ۳$

$x = ۰$

$x^{۲} - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = -۲$ یا $x = ۴$

$x^{۲} + ۳ = ۰ \Rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد.

x	$-\infty$		-۲		۰		۳		۴		$+\infty$
$۳-x$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$x^{۲}-۲x-۸$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x^{۲}+۳$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$(۳-x)(x^{۳}-۲x^{۲}-۸)(x^{۲}+۳)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	

مقدارهای کمتر از ۰ را می‌خواهیم، پس: $x \in (-\infty, -۲) \cup (۰, ۳) \cup (۴, +\infty)$

ب) در این سؤال باید دقت کنیم که x هایی که مخرج را صفر می‌کنند، جزء مجموعه جواب نیستند.

$$\frac{(۳x+۲)(x-۵)}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)}\geq ۰$$

$$۳x+۲=۰ \Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

$$x-۵=۰ \Rightarrow x=۵$$

$x=۰$ مخرج در این نقطه تعریف نشده

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$ مخرج در این نقطه تعریف نشده

$x^۲+x+۱=۰ \Rightarrow \Delta<۰$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

x	$-\infty$		$-\frac{۲}{۳}$		۰		۱		۵		$+\infty$
$۳x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$+$		$+$	
$x-۵$		$-$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$x-۱$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x^۲+x+۱$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(۳x+۲)(x-۵)}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)}$		$+$	۰	$-$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$-$	۰	$+$	

مقدارهای بزرگ‌تر یا مساوی صفر را می‌خواهیم، پس: $x\in(-\infty,-\frac{۲}{۳}]\cup(۰,۱)\cup[۵,+\infty)$

ج) $\frac{(x^۲-x-۶)(x-۱)^{۱۷}}{x^۸(۱-x^۲)^{۵۵}}\leq ۰$

دقت کنید $x^۸$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و علامت آن در کل عبارت تأثیری ندارد. بنابراین نیازی نیست آن را تعیین علامت کنیم. فقط ریشه آن را بررسی می‌کنیم.

$x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow x=-۲$ یا $x=۳$

(علامت $(x-۱)^{۱۷}$ با علامت $(x-۱)$ یکی است.) $(x-۱)^{۱۷}=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$x^۸=۰ \Rightarrow x=۰$ مخرج را صفر می‌کند، جزء مجموعه جواب نیست.

(علامت $(۱-x^۲)^{۵۵}$ با علامت $(۱-x^۲)$ یکی است.) $(۱-x^۲)^{۵۵}=۰ \Rightarrow ۱-x^۲=۰ \Rightarrow \underbrace{x=۱ \text{ یا } x=-۱}_{\text{مخرج را صفر می‌کند، جزء مجموعه جواب نیست.}}$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۳		$+\infty$
$x^{۲}-x-۶$		+	∘	−		−		−		−	∘	+	
$(x-۱)^{۷}$		−		−		−		−	∘	+		+	
$(۱-x^{۲})^{۵۵}$		−		−	∘	+		+	∘	−		−	
$\dfrac{(x^{۲}-x-۶)(x-۱)^{۱۷}}{x^{۸}(۱-x^{۲})^{۵۵}}$		+	∘	−	تعریف نشده	+	تعریف نشده	+	تعریف نشده	+	∘	−	

مقادیر کوچک‌تر یا مساوی صفر را می‌خواهیم. پس: $x\in(-۲,-۱)\cup[۳,+\infty)$

با توجه به این‌که $|x-۲|$ و $|۲x^{۲}+۳x-۲|$ عبارات بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، فقط لازم است ریشه‌های آن‌ها را بررسی کنیم و در علامت کل عبارت تأثیری ندارند.

$$۲x^{۲}+۳x-۲=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=\frac{۱}{۲}$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۲- و $\frac{۱}{۲}$ در مجموعه جواب هستند، اما $x=۲$ در مجموعه جواب این نامعادله نیست، زیرا مخرج را صفر می‌کند.

$$۱-x^{۲}=۰\quad : x=-۱\ ,\ x=۱$$
$$x^{۲}+۳x=۰\ :\ x=۰\ ,\ x=-۳$$

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		$+\infty$
$(۱-x^{۲})$		−		−		−	∘	+		+		+	∘	−		−	
$x^{۲}+۳x$		+	∘	−		−		−	∘	+		+		+		+	
$\dfrac{\lvert ۲x^{۲}+۳x-۲\rvert(۱-x^{۲})}{(x^{۲}+۳x)\lvert x-۲\rvert}$		−	تعریف نشده	+	∘	+	∘	−	تعریف نشده	+	∘	+	∘	−	تعریف نشده	−	

$$x\in(-\infty,-۳)\cup[-۱,۰)\cup\{-۲,\tfrac{۱}{۲}\}\cup[۱,۲)\cup(۲,+\infty)$$

۶

$$1)\ \frac{x^2+x-4}{x}<1 \Rightarrow \frac{x^2+x-4-x}{x}<0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x}<0$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$x=0$$

$$2)\ x^2<64 \Rightarrow x^2-64<0$$

$$x^2-64=0 \Rightarrow x=\pm 8$$

x	$-\infty$	-8	-2	0	2	8	$+\infty$
(1)	−	−	+	−	+	+	
(2)	+	−	−	−	−	+	
دستگاه نامعادله							

در این دستگاه ، هر دو نامعادله کوچک‌تر از صفرند، پس:

$$x \in (-8,-2) \cup (0,2)$$

۷

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی است، پس داریم:

$$2x-1 \geq 0 \qquad (1)$$

از طرفی $\sqrt{2x-1}<x+2$ است، پس:

$$x+2>0 \qquad (2)$$

طرفین نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم ، تا رادیکال از بین برود، داریم:

$$2x-1<(x+2)^2 \quad (3)$$

بنابراین دستگاه نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 & (1) \\ x+2>0 & (2) \\ 2x-1<(x+2)^2 & (3) \end{cases}$$

$(۱)\ ۲x-۱\geq ۰$

$۲x-۱=۰$

$x=\frac{۱}{۲}$

$(۲)\ x+۲\geq ۰$

$x+۲=۰$

$x=-۲$ دستگاه در آن تعریف نشده عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود.

$(۳)\ ۲x-۱<x^۲+۴x+۴$

$x^۲+۲x+۵>۰$

$x^۲+۲x+۵=۰$

ریشه حقیقی ندارد $\Delta<۰$

x	$-\infty$ تا -۲	-۲ تا $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ تا $+\infty$
(۱)	−	−	+
(۲)	−	+	+
(۳)	+	+	+
دستگاه نامعادلات	تعریف نشده	تعریف نشده	

$\Rightarrow x\in[\frac{۱}{۲},+\infty)$

حالت (۱) $\begin{cases} x<۰ & (۱) \\ x^۲+x-۲\geq ۰ & (۲) \end{cases}$ یا حالت (۲) $\begin{cases} x\geq ۰ & (۱) \\ x^۲+x-۲>x^۲ & (۲) \end{cases}$

$(۱)\ x<۰$

$(۲)\ x^۲+x-۲=۰$

$x_۱=-۲\ ,\ x_۲=۱$

$(۱)\ x\geq ۰$

$(۲)\ x-۲>۰$

$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$

	x	$-\infty$ تا -۲	-۲ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا ۲	۲ تا $+\infty$
حالت (	(۱)	−	−	+	+	+
	(۲)	+	−	−	+	+
	دستگاه نامعادلات					
حالت (	(۱)	−	−	+	+	+
	(۲)	−	−	−	−	+
	دستگاه نامعادلات					

$\in(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$

فصل ۵

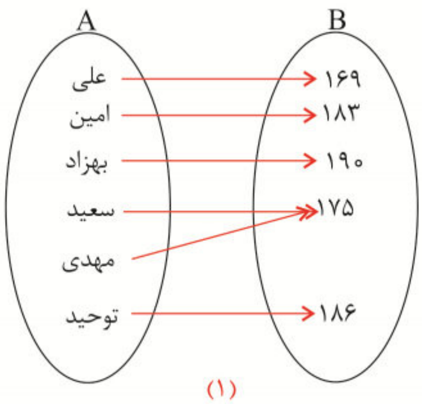
مفهوم تابع و بازنمایی آن

همان‌طور کـه مـی‌دانیـد هـر شـخص قـد مشخصـی دارد و یـا میـانگین دمـای هـوا در هـر روز مقـدار مشخصـی اسـت. به جدول‌های زیر دقت کنید.

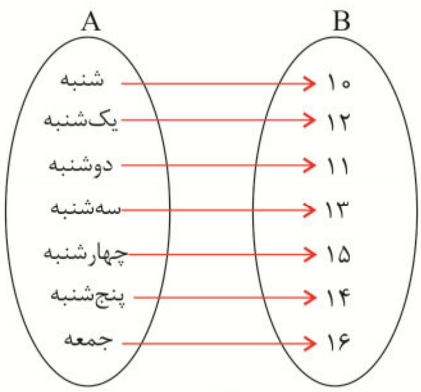
روزهای هفته	دمای هوا (c)
شنبه	۱۰
یک شنبه	۱۲
دوشنبه	۱۱
سه‌شنبه	۱۳
چهارشنبه	۱۵
پنج‌شنبه	۱۴
جمعه	۱۶

نام	قد (cm)
علی	۱۶۹
امین	۱۸۳
بهزاد	۱۹۰
سعید	۱۷۵
مهدی	۱۷۵
توحید	۱۸۶

با توجه به جدول‌های بالا، می‌توانیم یک ارتباط بین ستون اول و ستون دوم در قالب نمودار زیر داشته باشیم.



(۱)



(۲)

به این شیوه نمایش اطلاعات، نمودار پیکانی می‌گویند.

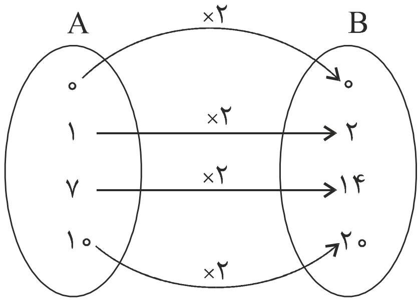
نمودار پیکانی در واقع بیان‌گر رابطه بین مجموعه‌ی A و B است.

فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی باشند، یک تابع از X به Y رابطه‌ای است که به هر عضو از X دقیقاً یـک عضـو از Y را نسبت می‌دهد.

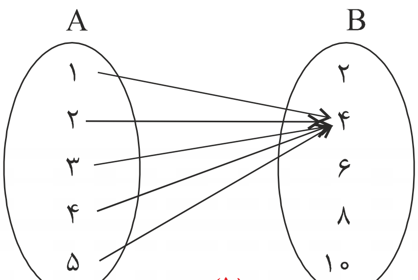
مثال: رابطه‌های (۱) و (۲) تابع‌اند.

مثال: نمودار پیکانی زیر بیانگر یک تابع است.

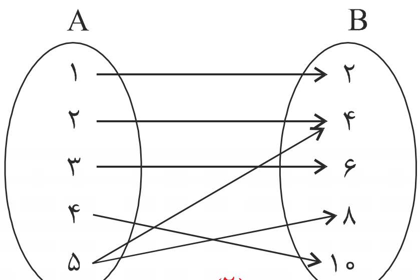
این تابع هر عضو از مجموعه‌ی A را دو برابر می‌کند و به مجموعه‌ی B می‌برد.



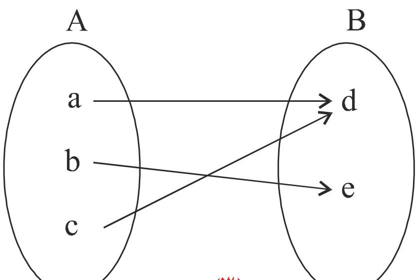
مثال: کدام‌یک از روابط زیر تابع هستند؟



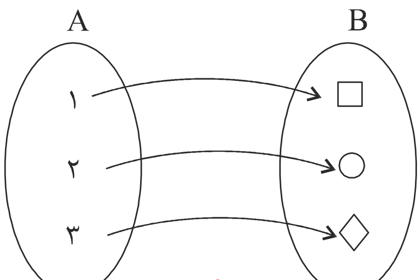
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

حل:

رابطه‌ی (۱) تابع است، زیرا هر عضو از مجموعه‌ی A را به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت می‌دهد.

رابطه‌ی(۲) تابع نیست. زیرا عضو ۵ از مجموعه A را به دو عضو از مجموعه B می‌برد.

$$\begin{pmatrix} ۵ \to ۴ \\ ۵ \to ۸ \end{pmatrix}$$

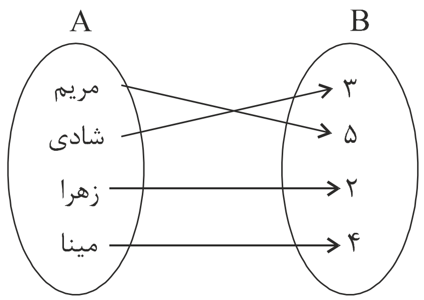
رابطه‌ی (۳) تابع است.

رابطه‌ی (۴) تابع است.

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار پیکانی زیر نشان‌دهنده‌ی تعداد عروسک‌های یک گروه از بچه‌های مهد کودک است.

(افراد و تعداد عروسک‌های آن‌ها)



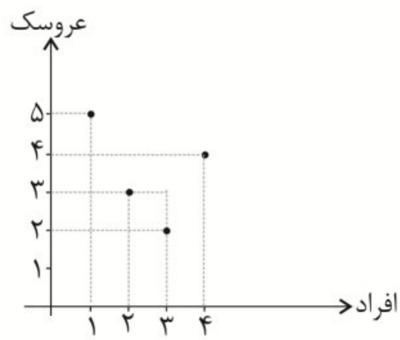
اطلاعات داده شده را به صورت جدول زیر می‌نویسیم.

مینا (۴)	زهرا (۳)	شادی (۲)	مریم (۱)	افراد
۴	۲	۳	۵	تعداد عروسک‌ها

اطلاعات جدول بالا را می‌توانیم به صورت زوج‌های زیر نمایش دهیم. (تعداد عروسک‌ها، افراد)

$(۱,۵),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۴)$

نمایش این نقاط روی محورهای مختصات به‌صورت زیر است و به آن نمودار تابع گوییم.



دقت کنید که زوج $(۱,۵)$ با $(۵,۱)$ متفاوت است، به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا زوج مرتب می‌گوییم.

در زوج مرتب دلخواه (x,y)، x را «مؤلفه‌ی اول» و y را «مؤلفه‌ی دوم» می‌نامیم. به عنوان مثال در زوج مرتب $(۵,۱)$، ۵ مؤلفه‌ی اول و ۱ مؤلفه‌ی دوم است.

اگر همه ی زوج‌های مرتب را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای اطلاعات داده شده به‌دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه‌ی داده شده می‌گویند.

برای نام‌گذاری این مجموعه از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۴)\}$$

مثال: نمایش زوج‌های مرتب زیر را روی دستگاه مختصات نمایش دهید و نمودار پیکانی آن‌ها را رسم کنید. سپس مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها تابع است.

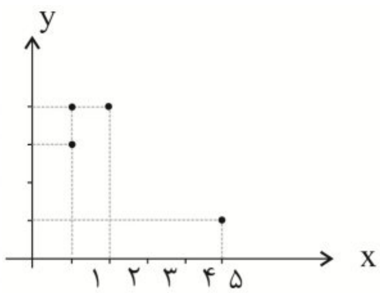
الف) $\{(۱,۳), (۲,۴), (۵,۱), (۱,۴)\}$

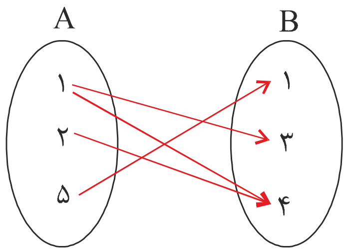
ب) $\{(۲,۱), (۳,۲), (۵,۲), (۴,۶)\}$

ج) $\{(-۱,۳), (۲,۱), (۲,-۲), (۴,۲)\}$

حل:

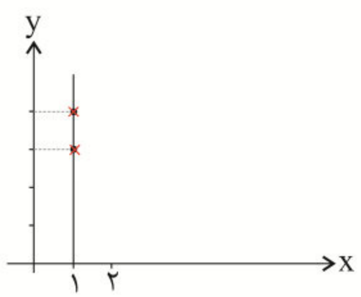
الف)



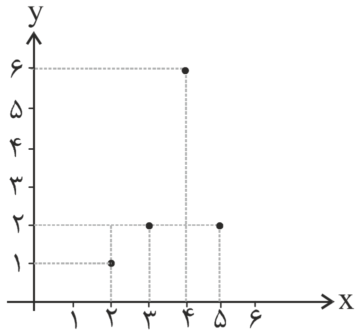


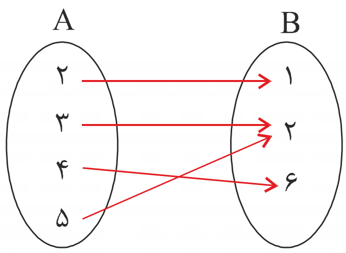
با توجه به نمودار پیکانی، می‌بینیم که رابطه‌ی الف، تابع نیست. زیرا عضو ۱ از مجموعه‌ی A به دو عضو ۳ و ۴ از مجموعه‌ی B نسبت داده شده است. $\begin{pmatrix} ۱ \to ۳ \\ ۱ \to ۴ \end{pmatrix}$

دقت کنید اگر در نقطه‌ی $(۱,۰)$ خطی موازی محور yها رسم کنیم (خط $x = ۱$)، نمودار را دو نقطه قطع می‌کند.



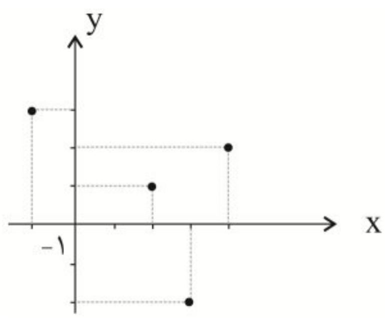
ب)

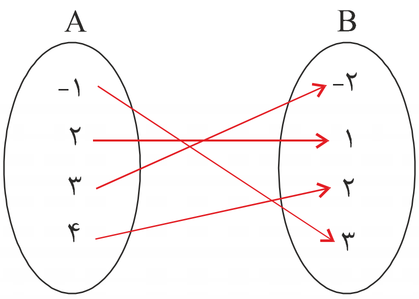




این رابطه تابع است، زیرا به هر عضو از مجموعه‌ی A، دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت می‌دهد.

ج)





این رابطه نیز تابع است، زیرا به هر عضو از مجموعه‌ی A دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت می‌دهد.

روی محورهای مختصات نیز هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(یعنی یا در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند)

نتیجه‌گیری:

اگر یک رابطه به صورت نمایش زوج مرتبی نوشته شود، هنگامی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند. یعنی:

اگر $x_۱ = x_۲ \Rightarrow y_۱ = y_۲$

مثال: کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) $\{(۳,۲),(-۱,۴),(۵,۱),(-۱,۶)\}$

ب) $\{(-۱,۲),(-۳,-۵),(۰,۶),(۱,۷)\}$

حل:

رابطه‌ی (الف) تابع نیست. زیرا زوج مرتب‌های (۴ و۱-) و (۶ و ۱-) دارای مؤلفه‌های اول برابرند، ولی مؤلفه‌های دوم آن متفاوت است.

رابطه‌ی(ب) تابع است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نیستند.

خود آزمون

۱. بازه‌های زیر را به‌صورت نماد ریاضی بنویسید و نمودار هندسی آن‌ها را رسم کنید.

الف) $(-\sqrt{۲},+\infty)$

ب) $(-۱,۳)\cup(-۶,۲)$

ج) $(-۲,۳)\cap(۰,۴)$

د) $(-\infty,\sqrt{۲})\cup(۱,+\infty)$

۲.نمادهای ریاضی زیر را به بازه تبدیل کنید.

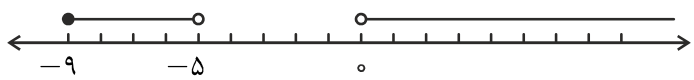
الف) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\leq x<۱\}$

ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۳\leq x<۱ \text{ یا } x>۰\}$

ج) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۴<x\leq ۳ \text{ و } ۲\leq x<۵\}$

د) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۰ \text{ و } x<۰\}$

۳. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر انتخاب درست‌تری برای محور نمایش داده شده است؟



الف) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۹\leq x<-۵ \text{ یا } x>۰\}$

ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۹\leq x<-۴ \text{ یا } x>۰\}$

ج) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۹\leq x\leq -۵ \text{ یا } x>۰\}$

۴.کدام‌یک از سه موارد زیر شامل عدد ۹ می‌شود؟

الف) $x<۹ \text{ یا } x>۹$

ب) $(-\infty,۹]\cup(۹,+\infty]$

ج) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq ۹\}$

د) $(-\infty,۹)\cap[۹,+\infty)$

۵. چه تفاوتی میان دو بازه‌ی $[۲,۸)$ و $[۲,۸]$ وجود دارد؟

۶.بازه‌ی $[-۱,۳)$ را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

۷. بازه‌ی $[۱,+\infty)$ را به‌صورت اشتراک سه بازه بنویسید.

۸. تفاضل بازه‌های زیر را حساب کنید.

الف) $[-۶,۶)-(-۷,۲)$

ب) $[۰,+\infty)-(۱,۲]$

۹.متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \quad , \ -۳\le x\le ۲\}$

ب) $B=\{۲k \mid k\in\mathbb{N} \ , \ ۱\le k\le ۳\}$

ج) $C=\{-۵k \mid k\in\mathbb{W}\}$

د) $\mathbb{Z}\bigcap\{-۱,۰\}$

هـ) $D=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \quad , \ x^۲<۶\}$

ی) $P=\{x \mid x\in\mathbb{R} \quad , \ ۰<x<۱\}$

۱۰.در زیر، مجموعه‌ی A مشخص شده است، تعداد اعضای این مجموعه را حساب کنید.

$A=\{۵k \mid k\in\mathbb{N}$ و ۵k عدد دو رقمی است$\}$

۱۱.اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ی نامتناهی باشد، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن A توضیح دهید.

۱۲. فرض کنید A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲ و B مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۵ باشد. در مورد متناهی یا نامتناهی بودن $A\bigcap B$ توضیح دهید.

۱۳.اگر $R=\{۱,۳,۵\}$، $S=\{۳,۴,۵\}$ و $T=\{۲,۴\}$ باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $R\bigcap S\bigcap T$

ب) $(R\bigcup S)\bigcap(R\bigcup T)$

۱۴. مجموعه‌ی $\mathbb{W}$ را به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی و همچنین به شکل اجتماع یک مجموعه‌ی متناهی بایک مجموعه‌ی نامتناهی بنویسید.

۱۵.مجموعه‌های زیر هر کدام چند عضو دارند؟

الف) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid ۳x+۱>\frac{۱}{۲}x-۳\}$

ب) $B=\{x\in\mathbb{N} \mid ۲x+\frac{۱}{۲}<x+۷\}$

ج) $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\ge ۰ \ , \ ۲^x\le x^۲\}$

د) $D=\{x\in\mathbb{N} \mid x\ge\frac{۱}{x}\}$

هـ) $P=\{x^۲ \mid x\in\mathbb{Z} \ , \ x^۲\le ۷\}$

ی) $F=\{۲x \mid x\in\mathbb{W} \ , \ ۰\le x<۴\}$

۱۶.اگر $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۲\le x\le ۲۰\}$ و $B=\{۲k+۱ \mid k\in\mathbb{W}\}$ باشند، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن $A\bigcap B$ توضیح دهید.

۱۷.اگر $A=\{۲,\{۲\}\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$، $n(B-A)$ را به‌دست آورید.

۱۸. مجموعه‌ی $A=\{\{\phi\},۲,۳,\{۲\},\{۲,۳\},\{۳\}\}$ چند عضو دارد؟

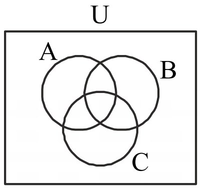
۱۹. اعضای مجموعه‌ی $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{۲}\in\mathbb{Z}\right\}$ را به‌دست آورید.

۲۰. اگر $U=\{\{a\},a,\{a,b\},\{b\},b\}$ و $A=\{\{a\}\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A' را مشخص کنید.

۲۱. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$(A-\phi)'\cap(U-A)'$

۲۲. در شکل زیر مجموعه‌های مشخص شده را هاشور بزنید.



الف) $(C'\cap A)\cap(A\cap B)$

ب) $(C-A)'\cap A$

ج) $\phi'\cap C$

۲۳. اگر $U=\{x\in\mathbb{Z} \mid \frac{۱}{x}\leq ۱\}$ و $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid ۴x+۴\leq ۰\}$ باشد، آن‌گاه A' را به‌دست بیاورید.

۲۴. اگر $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۱\leq x\leq ۶\}$ و $B=\{x\in\mathbb{N} \mid ۴\leq x\leq ۷\}$ باشند، تعداد اعضای $A\cup B$ را به‌دست آورید.

۲۵. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی مجزا باشند، اگر $n(A\cup B)=۱۴$ و $n(B)=۶+n(A)$ آن‌گاه $n(A)$ چه عددی است؟

۲۶. از میان ۱۰۰ نفر تماشاگران یک بازی، ۵۰ نفر آن‌ها کلاه بر سر دارند و ۶۰ نفر آن‌ها با لباس ورزشی به ورزشگاه آمده‌اند، همچنین ۲۰ نفر هم لباس ورزشی پوشیده‌اند و هم کلاه گذاشته‌اند. چند نفر از این تماشاگران نه کلاه بر سر دارند و نه لباس ورزشی دارند؟

۲۷. اگر مجموعه‌های A و B به‌صورت زیر باشند، تعداد اعضای $A\cup B$ را به‌دست آورید.

$A=\{۵k \mid k\in\mathbb{N} \,,\, ۵k\leq ۳۰\}$

$B=\{۳k \mid k\in\mathbb{N} \,,\, ۳k\leq ۳۰\}$

۲۸. اگر $n(B-A)=۷$، $n(A-B)=۱۰$ و $n(A)=۱۴$ آن‌گاه $n(A\cup B)$ را محاسبه کنید.

۲۹. اگر $A\cup B=A-B$ باشد، B چه مجموعه‌ای است؟

۳۰. اگر $A-B=A$ باشد، آن‌گاه $B-A$ چه مجموعه‌ای است؟

۳۱. اگر $n(A)=۶$ و $n(B)=۸$، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(B-A)\cup(A\cap B)$

ب) $A\cup(A\cap B)$

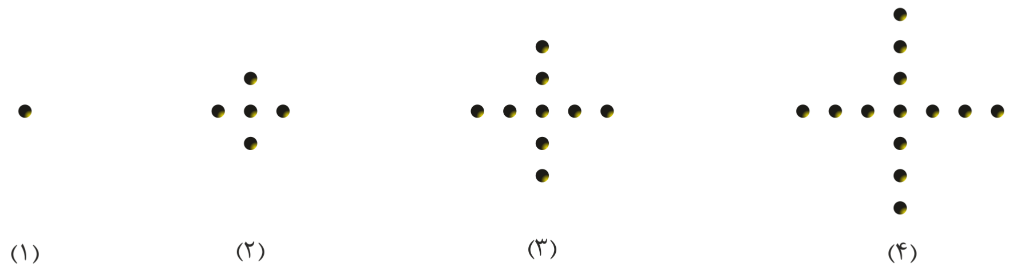
۳۲. در یک مهمانی ۲۰ نفره، ۱۴ نفر نوشیدنی‌های میوه‌ای، ۱۱ نفر نوشیدنی‌های کافئین‌دار و ۶ نفر هر دو نوشیدنی را دوست دارند.

الف) چند نفر فقط نوشیدنی میوه‌ای را دوست دارند؟

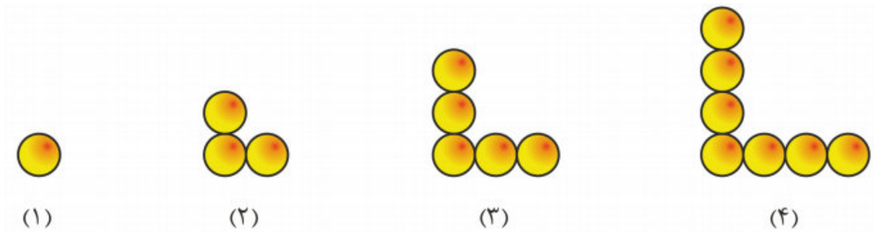
ب) چند نفر حداقل یکی از این دو نوشیدنی را دوست دارند؟

ج) چند نفر نوشیدنی میوه‌ای را دوست دارند یا نوشیدنی کافئین‌دار دوست ندارند؟

۳۳. به الگوهای زیر نگاه کنید. جمله‌ی عمومی آن‌ها را پیدا کنید؟ آیا این الگوها خطی هستند؟



۳۴. یک رابطه بین تعداد دایره‌های هر شکل بیابید.



۳۵. اگر داشته باشیم $۵n + a_n = ۱۶$، جدول مربوط به اطلاعات این الگو را برای ۳، ۲ و $n = ۱$ بنویسید.

۳۶. الگوی جدول زیر را مشاهده کنید. جمله‌ی عمومی آن را بنویسید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷

۳۷. در جدول زیر اطلاعات یک الگوی خطی داده شده است. معادله‌ی خطی که از این نقاط می‌گذرد را به‌دست آورید، سپس جمله‌ی عمومی آن را بنویسید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۴	۵	۶	۷	۸

۳۸. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را مشخص کنید و $a_{۲۰}$ را بیابید.

$$\frac{۱}{۲}, -\frac{۴}{۳}, \frac{۹}{۴}, -\frac{۱۶}{۵}, \frac{۲۵}{۶}, \ldots\ldots$$

۳۹. در دنباله‌ی $b_1=b_2=3$ و $b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$، جمله‌ی هشتم را به‌دست آورید.

۴۰. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $a_1=1$ و $a_n=a_{n-1}+2n-1$ کدام است؟

۴۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی a_n به‌صورت زیر است. مجموع جمله‌های پنجم و ششم این دنباله را به‌دست آورید.

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2}{8} & \text{زوج } n\\[2ex] \dfrac{n^2-1}{4} & \text{فرد } n\end{cases}$$

۴۲. اگر جمله‌ی a_{2n+5}اُم دنباله‌ای به‌صورت $\dfrac{n^3+1}{2n-1}$ باشد، جمله‌ی یازدهم آن چه می‌شود؟

۴۳. پنج جمله‌ی اول دنباله‌ی $a_n=2(3^{n-1})$ را بنویسید.

۴۴. جمله‌ی عمومی دنباله حسابی با جمله‌ی اول ۶۳ و قدر نسبت ۴−را به‌دست آورید.

۴۵. کدام‌یک از دنباله‌های زیر تشکیل دنباله عددی می‌دهند؟ قدر نسبت آن‌ها را محاسبه کنید.

الف) $6,8,10,12,...$

ب) $1,4,9,16,25,...$

۴۶. عدد q را چنان تعیین کنید که اعداد زیر، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله عددی باشند.

$q-20\,,\,4q+3\,,\,q+5$

۴۷. جمله‌ی اول یک دنباله عددی ۳ و قدر نسبت آن ۱۱ می‌باشد، جمله‌ی چندم آن ۹۱ است؟

۴۸. در یک دنباله حسابی $t_5+t_6=3$ و $t_8+t_9=-2$ می‌باشد، حاصل $t_{13}+t_{15}$ را به‌دست آورید.

۴۹. بین دو عدد که تفاصل آن‌ها ۷۲۰ است، پنج واسطه‌ی عددی درج می‌کنیم. قدرنسبت این دنباله حسابی را محاسبه کنید.

۵۰. در یک دنباله حسابی اگر $t_3=8$ و $t_6=17$ باشد، t_{14} را بیابید.

۵۱. اگر در یک دنباله‌ی حسابی داشته باشیم $t_1=3x+1$ و $d=2x+6$، آن‌گاه t_6 را محاسبه کنید.

۵۲. اگر در یک دنباله‌ی حسابی داشته باشیم $t_n=6n+3$، آن‌گاه جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله را به‌دست آورید.

۵۳. اگر مجموع سه عدد که تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، ۲۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۳۱ باشد، آن سه عدد را بیابید.

۵۴. بین دو عدد ۱۹ و ۳۹، چهار واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم تا یک دنباله حسابی صعودی حاصل شود، مجموع این چهار واسطه چقدر است؟

۵۵. زانوی پدر علی به توصیه‌ی پزشک تحت عمل جراحی قرار می‌گیرد. بعد از عمل برای سریع شدن روند بهبود، دکتر به او می‌گوید باید راه رفتن آهسته را در برنامه‌ی روزانه‌اش قرار بدهد. به این صورت که در هفته‌ی اول، هر روز $۱۲'$ راه برود و هر هفته بعد از آن $۶'$ به این زمان اضافه کند، چند هفته باید بگذرد تا زمان راه رفتن پدر علی ۶۰دقیقه شود؟

۵۶.خانواده مینا قصد دارند به مناسبت قبولی او در دانشگاه مهمانی بدهند. آن‌ها قصد دارند مهمانی خود را در یک هتل برگزار کنند. کارمند پذیرش هتل اطلاعات مربوط به مهمانی‌های گذشته که در هتل برگزار شده را به پدر مینا می‌دهد. با توجه به جدول زیر اگر این خانواده ۶۰ نفر مهمان داشته باشند، چه هزینه‌ای را باید پرداخت کنند؟

تعداد مهمان‌ها	۳۳	۳۴	۳۵
هزینه‌های پرداخت شده	۵۰۰۰۰۰	۵۰۹۰۰۰	۵۱۸۰۰۰

۵۷. تصور کنید که شما به تازگی صاحب شغلی شده‌اید. (به صورت پاره‌وقت). حقوق شما در ابتدا ۸۰۰۰۰۰ تومان است و هر سال ٪۷ فزایش می‌یابد. حقوق شما بعد از ۶ سال تقریباً چقدر می‌شود؟

۵۸. جمله‌ی چندم دنباله‌ی زیر ۲۰۴۸ است؟

۲,۸,۳۲,...

۵۹. در یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲، حاصل $\frac{t_۱t_۷}{(t_۲)^۲}$ کدام است؟

۶۰. جمله‌ی نهم یک دنباله هندسی، ۵ برابر جمله‌ی ششم آن است. نسبت جمله‌ی یازدهم به جمله‌ی پنجم را به‌دست آورید.

۶۱. بین دو عدد ۳ و ۱۹۲ پنج واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. اگر قدر نسبت این دنباله را منفی در نظر بگیریم. مجموع واسطه‌ها را محاسبه کنید.

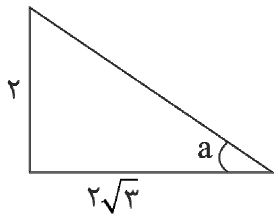
۶۲.جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی زیر را به‌دست آورید.

۳,−۶,۱۲,−۲۴,...

۶۳. دو دنباله هندسی با جمله‌های اول یکسان را در نظر بگیرید. قدر نسبت دنباله اول برابر ۳− و قدر نسبت دنباله دوم برابر ۲۷ است. جمله‌ی هفتم دنباله دوم، با جمله‌ی چندم دنباله اول برابر است؟

۶۴.اگر جمله‌ی چهارم در یک دنباله‌ی هندسی $\frac{۴}{۳}$ و جمله‌ی هفتم $\frac{۳۲}{۸۱}$ باشد، قدرنسبت این دنباله چه عددی است؟

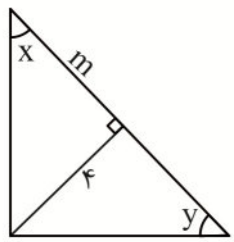
۶۵. باتوجه به اطلاعات شکل، زاویه a را بیابید.



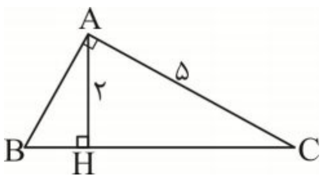
۶۶. مثلث ABC در زاویه C قائم است. اگر $\sin A = \frac{۲}{۳}$ باشد، $\tan B$ را به دست آورید.

۶۷. یک دوربین امنیتی در بانک روی دیواری با ارتفاع ۵ متر نصب شده است. وقتی که زاویه دید افقی دوربین ۲۴° درجه است، یک شیء را روی زمین مشاهده می‌کند. فاصله جسم تا پای دیواری که دوربین روی آن نصب است تقریباً چقدر است؟ $(\tan ۲۴^\circ \simeq ۰/۴۴)$

۶۸. در شکل زیر مقدار m را برحسب زاویه y به دست آورید.



۶۹.در مثلث ABC ، اگر $A = ۹۰^\circ$ و $H = ۹۰^\circ$ باشد، اندازه AB را به‌دست آورید.



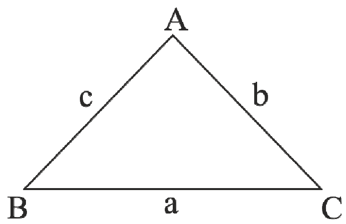
۷۰.حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin ۳۰^\circ + \cos ۴۰^\circ$

ب) $\tan ۴۵^\circ + \cos ۳۰^\circ - \sin ۴۵^\circ$

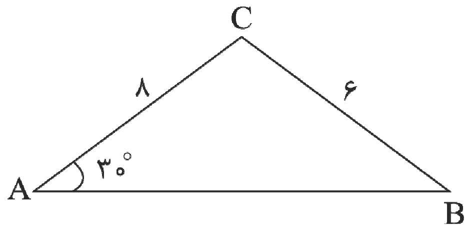
۷۱.در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ و $\cot B = \frac{۱۲}{۹}$ و اندازه هر کدام از اضلاع مثلث از ۱۰ کوچک‌ترند. $\sin C$ برابر با چه مقداری است؟

۷۲. برای مثلث دلخواه ABC ثابت کنید:

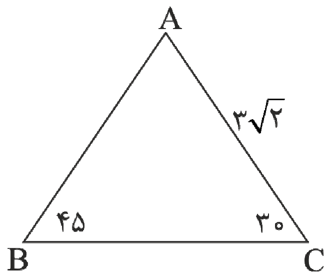


$$\frac{\operatorname{Sin} A}{a}=\frac{\operatorname{Sin} B}{b}=\frac{\operatorname{Sin} C}{c}$$

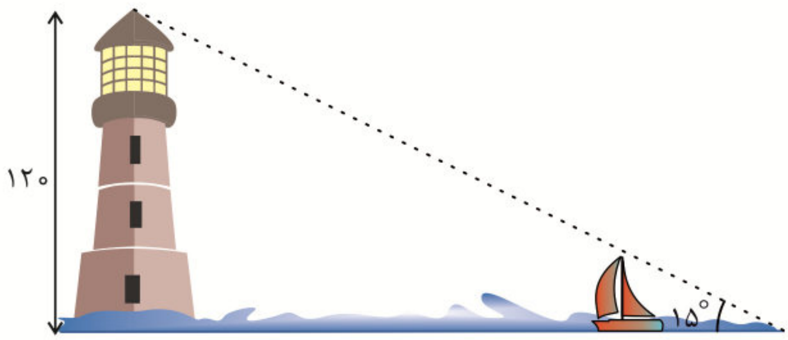
۷۳. در مثلث زیر $\operatorname{Sin} B$ چقدر است؟



۷۴. در مثلث زیر اندازه ضلع AB را به دست آورید.



۷۵. یک فانوس دریایی در ارتفاع ۱۲۰ متری از سطح دریا قرار دارد. یک قایق به سمت فانوس دریـایی در حرکـت است. باتوجه به شکل زیر، فاصله قایق تا فانوس دریایی را محاسبه کنید. $(\tan 15^\circ = ۰/۲۶)$



۷۶. هرگاه $\sin\theta\tan\theta < 0$ باشد، θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۷۷. حدود m را چنان بیابید طوری که $\cos x = 2m - 4$ شود.

۷۸. بیشترین و کمترین مقدار $A = \frac{-2}{3+\cos\theta}$ را به‌دست آورید.

۷۹. هرگاه $\frac{\cos\theta}{\sin\theta - 1} < 0$ باشد، θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۸۰. بیشترین مقدار عبارت $A = \cos^2\theta - 4\cos\theta + 3$ چقدر است؟

۸۱. درستی یا نادرستی نامساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$\tan 20^\circ < \tan 100^\circ$ $\qquad$ $\cot 350^\circ < \sin 60^\circ$

$\tan 120^\circ > \tan 260^\circ$ $\qquad$ $\sin 80^\circ < \tan 310^\circ$

$\sin 30^\circ < \sin 290^\circ$ $\qquad$ $\cos 110^\circ < \sin 110^\circ$

$\cos 340^\circ > \cos 100^\circ$

۸۲. اگر $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ و θ در ربع چهارم نباشد، $\tan\theta$ چه عددی است؟

۸۳. اگر نقطه M روی نیمساز ربع اول قرار داشته باشد و OM با قسمت مثبت محور xها زاویه θ بسازد، $\cot\theta$ کدام است؟

۸۴. تانژانت زاویه‌ای که خط $3x + 2y = 5$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد را حساب کنید.

۸۵. اگر شیب خطی برابر با $\tan 30^\circ$ و این خط از نقطه $(2,1)$ بگذرد، معادله آن را به دست آورید.

۸۶. در طول درس نشان دادیم $\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$، زاویه‌ای مثال بزنید که در رابطه $\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$ صدق کند.

۸۷. درستی عبارت‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\cos\theta\tan\theta = \sin\theta$

ب) $\frac{\tan\theta}{\cot\theta} = \tan^2\theta$

ج) $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1 - \sin\theta$

د) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

و) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

هـ) $\frac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta} = 1 - \sec^2\theta$

ی) $\sin\theta = \pm\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\theta}}$

ن) $\dfrac{۱-۲\cos^{۲}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

۸۸. اگر $\cot a = \dfrac{\sqrt{۷}}{۳}$ و a در ناحیه اول مثلثاتی باشد، آن‌گاه $\sin a$ چه عددی است؟

۸۹. اگر $\sin x = \dfrac{۳}{۵}$ و x در ناحیه دوم باشد، مقدار $\tan x$ را به‌دست آورید.

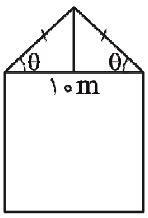
۹۰. اگر $\tan x = ۲$ و انتهای کمان x در ربع سوم باشد، مقدار $\sin x$ چقدر است؟

۹۱. اگر کمان a در ناحیه دوم باشد، مقدار عبارت $\sqrt{\dfrac{۱+\sin a}{۱-\sin a}} + \dfrac{۱-\sin a}{\cos a}$ را محاسبه کنید.

۹۲. اگر $\tan ۲۲^{\circ} = \dfrac{۲}{۵}$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(-۲۲^{\circ}) + \sin ۲۰۲^{\circ}}{\sin ۳۸۲^{\circ}}$ چه عددی است؟

۹۳. حاصل عبارت $\dfrac{\cos^{۳} x - \sin^{۳} x}{۱+\sin x\cos x}$ برابر با چه مقداری است؟

۹۴. اگر زاویه $\theta = ۴۳^{\circ}$ باشد و طول سقف خانه ۱۰ متر باشد، ارتفاع شیروانی را به‌دست آورید. $(\cos ۴۳^{\circ} = ۰/۷)$



۹۵. در جاهای خالی یکی از علامت‌های >، < یا = قرار دهید.

۱) $(۰/۲)^{۵}$ ◯ $(۰/۳)^{۳}$

۲) $(۰/۱)^{۱۰}$ ◯ $(۲)^{۱}$

۳) $\sqrt{۰/۰۰۰۴}$ ◯ $۰/۰۲$

۴) $\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}$ ◯ $\sqrt[۴]{۰/۰۰۰۱}$

۹۶. حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\sqrt[۵]{۸۶۴} \times \sqrt[۵]{۴۶۰۸۰}$

۲) $\sqrt{۷۲}$

$۳)\sqrt[۴]{۲۸۸} \times \sqrt[۴]{۸\times۹}$

$۴)\sqrt[۳]{۴۰}$

$۵)\sqrt[۴]{۱/۶ \times ۱۰^{-۳}}$

$۶)\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{x^{۱۲۰}}}}$

$۷)\sqrt[۴]{۸۰x^{۵}y^{۳}} \;,\; x,y>۰$

$۸)\sqrt[۳]{۰/۰۰۰۲۱۶}$

$۹)\sqrt[۴]{۲۵۲ + \sqrt[۳]{۵۲ + \sqrt{۱۴۴}}}$

$۱۰)\sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}} \times \sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}$

۹۷. مقدار تقریبی عبارات زیر را به‌دست بیاورید.

$۱)\sqrt[۵]{۶۸}$

$۲)\sqrt[۴]{۲۵۴}$

۹۸. در تساوی $\frac{x^{۲}}{۱۲۸}=\frac{۱۶۲}{x}$، مقدار x چه عددی است؟

۹۹.مقدار عبارات زیر را پس از ساده کردن کسر محاسبه کنید.

$۱)\frac{۲^{۱}+۲^{۰}+۲^{-۱}}{۲^{-۲}+۲^{-۳}+۲^{-۴}}$

$۲)\sqrt{۸}+\sqrt{۱۸}$

۱۰۰. اگر $x^{۲}y+xy^{۲}+x+y=۱۶۸۰۷$ و $xy=۶$ باشد، مقدار $\sqrt[۴]{x+y}$ را به‌دست آورید.

۱۰۱. در عبارات زیر، مقدار ممکن برای x را پیدا کنید. (فرض کنید x مقدار مثبتی باشد.)

$۱)(۲۵)^{x}(۱۲۵)^{x}=(۱۲۵)^{x}(\frac{۱}{۲۵})$

$۲)۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}=۲^{x}$

۱۰۲.اگر $x^{۲}=۱۰۰$ و $x^{۳}\neq۱۰۰۰$ باشد، مقدار $x^{۵}$ را به‌دست آورید.

۱۰۳.اگر $\frac{۱}{x^{۳}}-\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x}-۱=۰$ باشد، مقدار $(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)^{۱۰}$ را به‌دست بیاورید.

۱۰۴.در عبارت $\left((\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = ۱۶$، x چه عددی است؟

۱۰۵. صاحب یک هتل قصد دارد، در اتاق‌های آن فرش پهن کند به‌طوری که فرش کل اتاق را نپوشاند و به تناسب اندازه‌ی اتاق از دیوار $\sqrt{x}$ متر فاصله داشته باشد. اگر طول و عرض یک اتاق به‌ترتیب ۱۰ و ۶ متر و مقدار x، ۲/۲۵ باشد، مساحت فرش چقدر است؟

۱۰۶.عبارت زیر را ساده کنید.

$$-۳\sqrt{۱۶۰}+۸\sqrt{۴۰}+\sqrt{۹۰}$$

۱۰۷. محاسبه کنید.

الف) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۵^۲}\times\sqrt[۳]{۵^{۱۰}}}$

ب) $\dfrac{\sqrt[۶]{(\sqrt{a}-۱)^۶}}{\sqrt{a}-۱}\ ,\ a>۱$

ج) $\sqrt[۱۱]{b^{۱۰}\sqrt[۵]{b^۲\sqrt[۶]{b^{۱۸}}}}\ ,\ b>۰$

د) $\dfrac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}$

و) $\sqrt[۵]{\dfrac{۳۲}{۲۴۳}}$

۱۰۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۳\sqrt[۴]{۴۰۵}+۵\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۸۰}+۴\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۴۰۵}+\sqrt[۴]{۸۰}$

ب) $\sqrt[۵]{a^۶b^۶}-۲b\sqrt[۵]{a^۶b}-۵\sqrt[۵]{a^۶b^۶}+۳a\sqrt[۵]{ab^۶}+۳ab\sqrt[۵]{ab}$

ج) $\dfrac{\sqrt[۵]{a^۳}\times\sqrt[۳]{a^۶}}{\sqrt[۷]{a^{۱۴}}\div\sqrt[۵]{a^۲}}$

۱۰۹.اگر $x>۰\ ,\ \sqrt[۶]{x}=۴$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

۱۱۰. اگر $\left(\left(\dfrac{۵}{۴}\right)^۵\right)^{x^۶}=\left(\left(\dfrac{۵}{۴}\right)^۴\right)^{(\frac{۵}{۴})^۷}$، مقدار x را به‌دست آورید.

۱۱۱. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{۳۶x^۲y^۴}\ ,\ x>۰$

ب) $\sqrt[۳]{-۲۷a^۳b^۶}$

ج) $(\sqrt[۱۰]{۲۵})^۵$

د) $\sqrt[۵]{۹۹}\times(\sqrt[۳]{۹۹})^۲$

۱۱۲.اگر $\sqrt{N}=\sqrt{۱۰۸}+\sqrt{۱۲}$،آن‌گاه مقدار N را به‌دست آورید.

۱۱۳. مقدار عبارت زیر را در کوتاه‌ترین زمان ممکن به‌دست آورید.

$(\sqrt[۳]{۲})^{۱۵}(\sqrt{۵})^۶$

۱۱۴.اگر $N=۲^{۰/۱۵}$ و $N^b=۱۶$ باشد، مقدار b را به‌دست بیاورید.

۱۱۵. عبارت زیر را تا حد ممکن ساده کنید.

$\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۷+۳\sqrt{۵}}$

۱۱۶.اگر $(۲۵\sqrt{۵})^x=(\sqrt[۳]{۵})^{x+۱}$ باشد، x چه عددی است؟

۱۱۷. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}}}}$

ب) $\sqrt[۷]{(\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{a^۷}}})^{۴۵}}$

۱۱۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست بیاورید.

الف) $\sqrt[۳]{۴}\times۲^{-\frac{۵}{۳}}\times\sqrt[۳]{۲}\times۲^{-\frac{۲}{۳}}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}\times\frac{۱}{\sqrt[۸]{۳}}\times۳^{-\frac{۱}{۱۶}}$

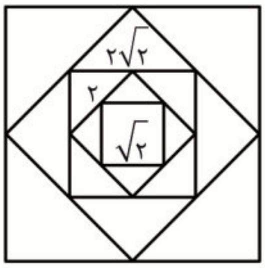
۱۱۹.مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

ب) $\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}$

ج) $\frac{۷\sqrt{۵}-۴}{۷\sqrt{۵}+۴}$

۱۲۰.در شکل زیر مربع‌هایی را می‌بینید که به صورت تودرتو درون هم قرار گرفته‌اند. اگر طول ضلع مربع اول $\sqrt{۲}$ باشد، طول ضلع مربع هجدهم چقدر است؟



۱۲۱.جمعیت افراد بزرگسال در یک شهر ۲۵۰۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت مورد نظر بعد از هر سال ٪۳ افزایش یابد، بعد از سه سال، جمعیت افراد بزرگسال این شهر تقریباً چند نفر می‌شود؟

۱۲۲. حاصل عبارت $(۳+\sqrt{۳})^۳+(\sqrt{۳}-۳)^۳$ را بیابید.

۱۲۳.مقدار عبارت $(۳-۲\sqrt{۲})^۳(\sqrt{۲}+۱)^۶$ چه عددی است؟

۱۲۴.هرگاه $\frac{۱}{۳}=\frac{x^۲}{x^۴+۱}$ و $x>۰$ باشد، مطلوب است محاسبه $A=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$.

۱۲۵.اگر $x^۲-۲x+۳=۰$ باشد، حاصل عبارت $x^۳+\frac{۲۷}{x^۳}$ را به‌دست آورید.

۱۲۶.هر یک از عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۲+۷x+۱۲$

ب) $(x-y)^۲-(x-y)-۳۰$

پ) $x^۴-۵x^۲+۴$

ت) $a^۶-۷a^۳-۸$

ث) $۹x^۲-۱۲xy+۴y^۲-۹$

ج) $۸ax-bx+۸ay-by$

چ) $x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$

هـ) y^5+y+1

و) $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$

۱۲۷. اگر $a+b+c=1$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2=1$$

۱۲۸. اگر $a+b+c=0$ و $a^2+b^2+c^2=1$ باشد، حاصل عبارت $a^4+b^4+c^4$ را به‌دست آورید.

۱۲۹. حاصل عبارت $A=\frac{x^2+4}{x^2-4x+3}+\frac{3}{x^2-x-6}$ را به‌دست آورید.

۱۳۰. حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\left(\frac{x^2-3yx+2y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-4yx+3y^2}{x-3y}\right)\div\frac{y^2-x^2-x+2y}{x+y}$

ب) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}$

۱۳۱. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{19}{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{3^2}}$

ب) $\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$

۱۳۲. ریشه معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{2}x^2=0$

ب) $-\frac{1}{5}x^2=0$

پ) $(\sqrt{3}-2)x^2=0$

ث) $2x^2+5x=0$

ت) $-7x^2+3x=0$

ج) $x^2-49=0$

د) $x^2-x-2=0$

و) $x^2+3x+2=0$

هـ) $(x+1)^2-3(x+1)=0$

ی) $(2x-1)(x+3)=-3$

۱۳۳. با فرض این‌که $a, b \neq ۰$، معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲ + (a+۱)x + a = ۰$

ب) $۲ax^۲ + (۵b - ۲a)x - ۵b = ۰$

ج) $(x+۲)^۲ - ۲(x+۱)(x-۳) + (x-۳)^۲ = ۰$

۱۳۴. با استفاده از مربع کامل کردن معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$

ب) $x^۲ - ۶x - ۱۳ = ۰$

ج) $\frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۲} = ۰$

د) $۲x^۲ + ۷x + ۱۱ = ۰$

۱۳۵. معادلات زیر را با استفاده از فرمول حل کنید.

الف) $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$

ب) $۲x^۲ + x - ۱ = ۰$

ج) $(۲x - ۳)^۲ = ۱۱x - ۱۹$

د) $\frac{x^۲ - ۱}{۲} = ۱۱(x+۱)$

۱۳۶. معادله‌ی $ax^۲ + ۳x + ۱۰ = ۰$ را در نظر بگیرید. مقدار a را برای هر کدام از حالت‌های زیر به‌دست آورید.

الف) معادله دو ریشه متمایز داشته باشد.

ب) معادله یک ریشه داشته باشد.

ج) معادله جواب حقیقی نداشته باشد؟

۱۳۷. یک سال پیش، سن پدر علی، ۸ برابر سن علی بود. حال سن پدر علی، مربع سن علی است. پدر علی چند سال سن دارد؟

۱۳۸. بدون محاسبه و با استفاده از فرمول، حاصل جمع ریشه‌های معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱۰x^۲ - ۱۱x - ۱۲ = ۰$

ب) $x + ۷ = (۲x - ۱)(۳x - ۲)$

ج) $x^۲ = \sqrt{۲}(۳x - \sqrt{۲}x)$

۱۳۹. اگر حاصل‌جمع ریشه‌های معادله‌ی $(۵k+۲)x^۲ + ۷kx - ۸k = ۰$ برابر با عدد ۳ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های آن را محاسبه کنید.

۱۴۰. دو مربع دارای اضلاع $x+۶$ و $۲x+۱$ سانتی‌متر هستند. اگر مجموع مساحت‌های آن‌ها $۶۹۷cm^۲$ باشد، مساحت هر یک از مربع‌ها را جداگانه به‌دست آورید.

۱۴۱.نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲x^۲$

ب) $y=-x^۲+x+۱$

ج) $y=۳(x+۱)(x-۴)$

د) $y=-(x+۳)^۲-۵$

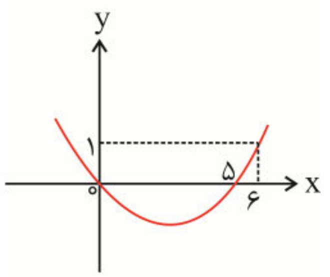
و) $y=-۲(x+۴)^۲$

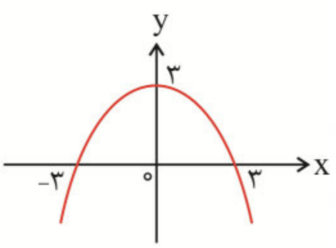
۱۴۲.معادله محور تقارن سهمی $y=۲x^۲+(m+۱)x-۴$، به‌صورت $۴x-۳=۰$ است. کمترین مقدار این سهمی را بیابید.

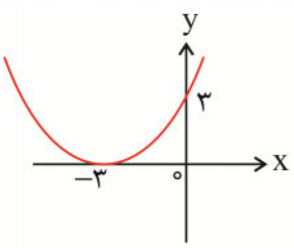
۱۴۳. رأس سهمی $y=-۳x^۲-۲(۲k+۵)x+۴$ روی محور y قرار دارد. مقدار k را محاسبه کنید.

۱۴۴.سهمی $y=mx^۲-(m+۱)x+۲m-۱$ از نقطه $A(۲,۹)$ می‌گذرد. مقدار m را بیابید.

۱۴۵. معادلات سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف)


ب)


ج)


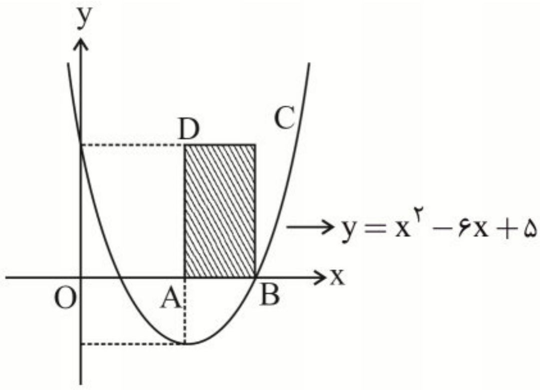
۱۴۶.نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y=|x^{۲}-۳x+۲|$

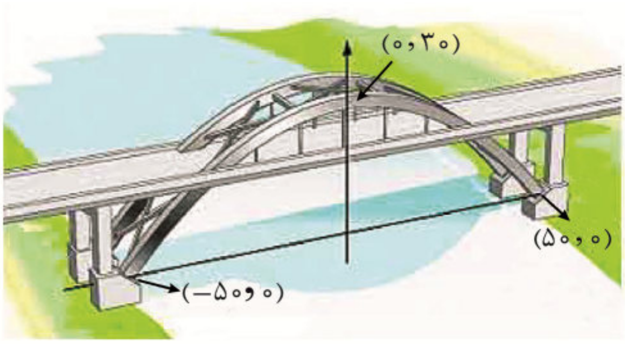
ب) $y=-x^{۲}+۲|x|+۳$

ج) $y=x|x+۲|$

۱۴۷. با توجه به شکل مساحت مستطیل ABCD را محاسبه کنید.



۱۴۸. برای محکم کردن یک پل‌سنگی، یک سازه‌ی فلزی به شکل منحنی از آن عبور کرده است. اگر این سازه از نقاط $(-۵۰,۰)$، $(۰,۳۰)$ و $(۵۰,۰)$ بگذرد، معادله آن را بیابید.



۱۴۹.علامت هر کدام از چند جمله‌ای‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $۳x-۲$

ب) $x^{۲}-۵x+۴$

ج) $۱۲x^{۲}+۴\sqrt{۳}x+۱$

د) $-۴x^{۲}+۱۰x-۲۵$

۱۵۰. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 < 9x - 20$

ب) $4x - 7x^2 > 0$

ج) $(2x-1)^2 > (x-5)^2$

۱۵۱. برای کدام مقدار k معادله $x^2 + 2(1-k)x + 1 = 0$

الف) ریشه حقیقی ندارد.

ب) ریشه مضاعف دارد.

ج) دو ریشه مجزا دارد.

۱۵۲.نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x(x-1)^2 \geq 0$

ب) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$

ج) $(3x-2)(x-3)^2(x+1)^2(x+2)^4 < 0$

د) $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x} \geq 0$

و) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 3$

۱۵۳. نامعادله $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$ را حل کنید.

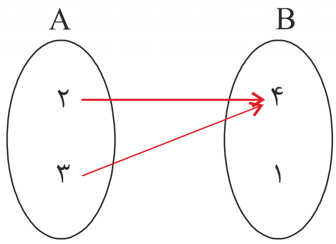
۱۵۴. نامعادله $|x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2$ را حل کنید.

۱۵۵.مقدار a و b را طوری پیدا کنید که زوج مرتب $(2a-3b\ ,4a-1)$ با زوج مرتب $(5,2)$ برابر باشد.

۱۵۶.اگر دو زوج مرتب $(2m-1,4)$ و $(5,m+1)$ برابر باشند، مقدار m را بیابید.

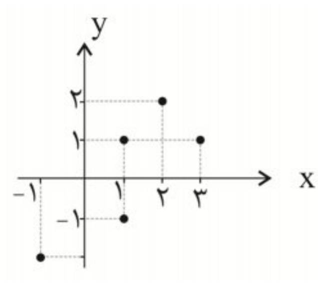
۱۵۷.در گزینه‌های زیر رابطه‌ای که تابع است را مشخص کنید.

الف)

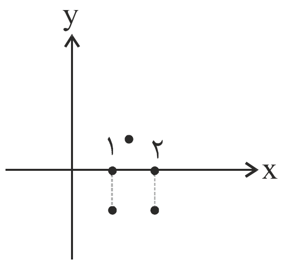


ب) $\{(-۱,۰),(۲,۱),(۳,-۱),(-۲,۳)\}$

ج)



د)

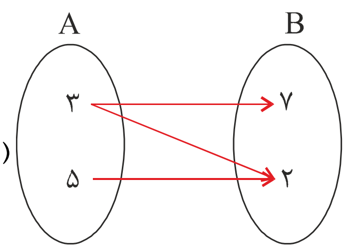


۱۵۸.مقدار a و b را طوری مشخص کنید که رابطه‌ی $\{(-۴,a^{۲}-۱),(a-۶,۳),(-۴,۳),(-۸,b)\}$ تابع باشد.

۱۵۹.تابع بودن یا نبودن رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) رابطه ی بین مستطیل‌ها و محیط آن‌ها.

ب)



۱۶۰. رابطه‌ی $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N},x\geq y,x<۳\}$ مفروض است، R را به‌صورت زوج‌های مرتب نوشته ،سپس مشخص کنید که رابطه‌ی مورد نظر تابع است یا خیر؟

۱۶۱.در هر یک از موارد زیر رابطه‌ای بین دو پدیده ذکر شده است. مشخص کنید که کدام‌یک از رابطه‌ها یک تابع را توصیف می‌کند؟ (هر پدیده‌ای که اول ذکر شده مؤلفه‌ی اول می‌باشد).

الف) رابطه بین هر فرد با اثر انگشت او

ب) رابطه‌ی بین اعداد و توان سوم آن‌ها

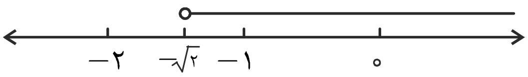
ج) رابطه‌ی بین یک کشور و تعداد همسایگان آن‌ها

د) رابطه بین یک صندوق پستی و تعداد نامه‌های درون آن

پاسخ

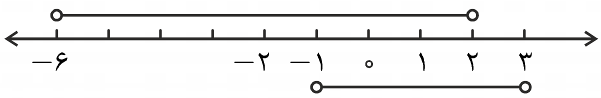
۱.

الف) $\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\sqrt{۲}\}$

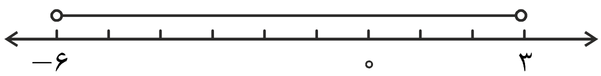


ب) $\{x\in\mathbb{R} \mid -۱<x<۳ \text{ یا } -۶<x<۲\}$

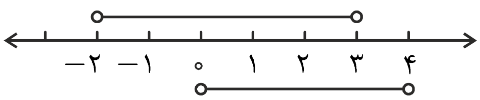
حال ابتدا نمودار هندسی مربوط به بازه را رسم کنیم.



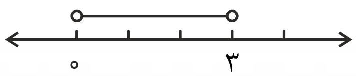
با نگاهی به نمودار می‌بینیم اجتماع دو بازه به‌صورت بازه‌ی $(-۶,۳)$ است.



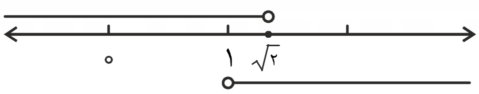
ج) $\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۳ , ۰<x<۴\}$



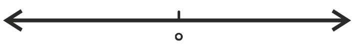
باتوجه به نمودار هندسی، $(۰,۳)$ پاسخ سوال است.



د) $\{x\in\mathbb{R} \mid x<\sqrt{۲} \text{ یا } x>۱\}$



اجتماع این دو بازه، کل اعداد حقیقی است.



۲.

الف) $[-۱,۱)$

ب) $[-۳,۱)\cup(۰,+\infty)$

ج) $(-۴,۳]\cap[۲,۵)$

د) $[۰,+\infty)\cap(-\infty,۰)=\phi$

۳.

قسمت (الف)

۴.

قسمت (ب)

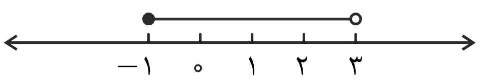
تنها قسمت (ب) شامل عدد ۹ می‌شود و بقیه‌ی قسمت‌ها عدد ۹ را درون خود ندارند.

۵.

بازه $(۲,۸]$ شامل عدد ۲ نیست، ولی $۲\in[۲,۸]$ است. بنابراین $(۲,۸]\subseteq[۲,۸]$.

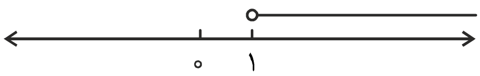
۶.

$[-۱,۳)=[-۱,۱]\cup(۱,۳)=(-۱,۳)\cup\{-۱\}$



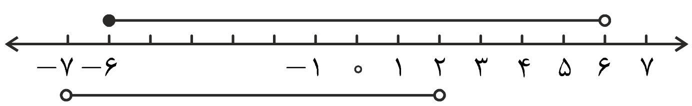
۷.

$[۱,+\infty)=(-۱,+\infty)\cap(۰,+\infty)\cap[۱,+\infty)$



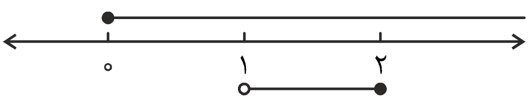
۸. ابتدا نمودار هندسی را رسم می‌کنیم.

الف)



$[-۶,۶)-(-۷,۲)=[۲,۶)$

ب)



$[0,+\infty)-(1,2]=[0,1]\bigcup(2,+\infty)$

۹.

الف) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$

$n(A)=6$، بنابراین A مجموعه‌ای متناهی است.

ب) $k=1,2,3 \Rightarrow B=\{2,4,6\}$

$n(B)=3$، بنابراین مجموعه‌ی B متناهی است.

ج) $k=0,1,2,3,... \Rightarrow C=\{0,-5,-10,-15,...\}$

همان‌طور که می‌بینیم، تعداد اعضای C قابل شمارش نیست. بنابراین C مجموعه‌ای نامتناهی است.

د) می‌دانیم که اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A\bigcap B=A$. بنابراین $\mathbb{Z}\bigcap\{-1,0\}=\{-1,0\}$ و مجموعه‌ای متناهی است.

هـ) تنها ارقام ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ در نامساوی $x^2<6$ صدق می‌کنند. بنابراین $D=\{-2,-1,0,1,2\}$ و مجموعه‌ای متناهی است.

و) تعداد اعضای P قابل شمارش نیست. بنابراین P مجموعه‌ای نامتناهی است.

۱۰.

$k=1,2,3,4,5,...,19$
$A=\{5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95\}$

بنابراین $n(A)=19$ است و A مجموعه‌ای متناهی است.

۱۱.

اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه‌ی A، هم می‌تواند متناهی و هم نامتناهی باشد. به عنوان مثال $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{W}$ هر دو مجموعه‌ای نامتناهی هستند. همچنین $\{0,1\}\subseteq\mathbb{Z}$ است که $\{0,1\}$ مجموعه‌ای متناهی است.

۱۲.

$A:$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲ $=\{1,2,3,4,6,12\}$

$B:$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۵ $=\{1,3,5,15\}$

$A\bigcap B=\{3\}$

بنابراین مجموعه‌ی $A\bigcap B$، متناهی است.

۱۳.

الف)
$$R\bigcap S\bigcap T=(R\bigcap S)\bigcap T=\{3,5\}\bigcap\{2,4\}=\phi$$
$$\Rightarrow n(R\bigcap S\bigcap T)=0$$

ب)

$$(R\cup S)\cap(R\cup T)=\{۱,۳,۴,۵\}\cap\{۱,۲,۳,۴,۵\}=\{۱,۳,۴,۵\}$$
$$\Rightarrow n\big((R\cup S)\cap(R\cup T)\big)=۴$$

۱۴.

تعریف می‌کنیم $A=\{۲k-۲ \mid k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$. دو مجموعه‌ی A و B نامتناهی‌اند و اعضای آن‌ها به‌صورت $A=\{۲,۴,۶,۸,...\}$ و $B=\{۱,۳,۵,۷,...\}$ است.

بنابراین $\mathbb{W}$ را به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی نوشتیم:

$$\mathbb{W}=A\cup B$$

همچنین می‌توانیم داشته باشیم:

$$\mathbb{W}=\{۰\}\cup\mathbb{N}$$

در این‌جا $\mathbb{W}$ به‌صورت اجتماع یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

۱۵.

الف) برای حل این سوال، ابتدا نامساوی را حل می‌کنیم.

$$۳x+۱>\frac{۱}{۲}x-۳\Rightarrow ۳x-\frac{۱}{۲}x>-۳-۱\Rightarrow\frac{۵}{۲}x>-۴\Rightarrow x>-\frac{۸}{۵}$$
$$\Rightarrow A=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\frac{۸}{۵}\}$$

بنابراین A مجموعه‌ای نامتناهی است.

ب)

$$۲x+\frac{۱}{۲}<x+۷\Rightarrow x<\frac{۱۳}{۲}=۷/۵$$
$$\Rightarrow B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}\Rightarrow n(B)=۷$$

ج) تنها اعداد ۲، ۳، ۴ در این نامساوی صدق می‌کنند. بنابراین:

$$C=\{۲,۳,۴\}\Rightarrow n(C)=۳$$

د) کلیه اعداد طبیعی در نامساوی مجموعه‌ی D صدق می‌کنند. بنابراین $D=\mathbb{N}$ و نامتناهی است.

هـ)

$$x=-۱,-۲,۰,۱,۲\Rightarrow P=\{۱,۴,۰\}\Rightarrow n(P)=۳$$

ی)

$$x=۰,۱,۲,۳\Rightarrow F=\{۰,۲,۴,۶\}\Rightarrow n(P)=۴$$

۱۶.

$$A=\{۲,۳,۴,...,۲۰\}\Rightarrow n(A)=۱۹$$
$$B=\{۱,۳,۵,۷,...\}$$
$$A\cap B=\{۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$$

اعضای $A\bigcap B$ قابل شمارش است و $n(A\bigcap B)=۹$، بنابراین $A\bigcap B$ مجموعه‌ای متناهی است.

.۱۷

$$B-A=\{۱,۳\}\Rightarrow n(B-A)=۲$$

.۱۸

$$n(A)=۶$$

.۱۹

$x=-۱,۱$ در مجموعه‌ی B قرار می‌گیرد. بنابراین $n(B)=۲$.

.۲۰

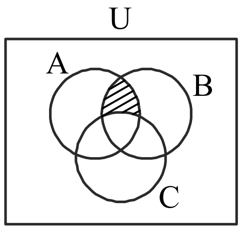
$$A'=U-A=\{a,\{a,b\},\{b\},b\}$$

.۲۱

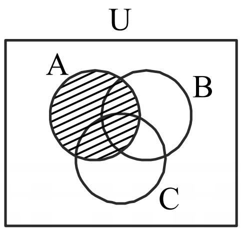
$$(A-\phi)'\bigcap(U-A)'=A'\bigcap(A')'=A'\bigcap A=\phi$$

.۲۲

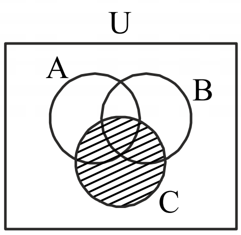
الف)



ب)



ج)



۲۳.

با توجه به سوال، مجموعه‌ی $U=\mathbb{Z}-\{۰\}$ و $A=\{-۱,-۲,-۳,...\}$ می‌شود. بنابراین A' مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.

۲۴.

برای حل سوال ، مجموعه‌های A، B و $A\cup B$ را مشخص می‌کنیم.

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$
$$B=\{۴,۵,۶,۷\}$$
$$A\cap B=\{۴,۵,۶\}$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۴-۳=۷$$

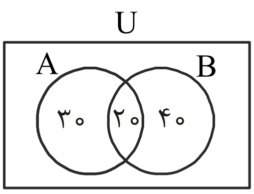
۲۵.

چون دو مجموعه مجزا هستند، داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$
$$\Rightarrow ۱۴=n(A)+۶+n(A)\Rightarrow ۲n(A)=۸\Rightarrow n(A)=۴$$

۲۶.

تعریف می‌کنیم:



$A=\{$تماشاگرانی که کلاه بر سر دارند$\}$

$B=\{$تماشاگرانی که لباس ورزشی پوشیده‌اند$\}$

سوال از ما تعداد اعضای $(A\cup B)'$ را می‌خواهد.

$$(A\cup B)'=U-(A\cup B)$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۵۰+۶۰-۲۰=۹۰$$
$$n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۹۰=۱۰$$

۲۷.

$$A=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰\}$$
$$B=\{۳,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,۲۴,۲۷,۳۰\}$$
$$A\cap B=\{۱۵,۳۰\}$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۹-۲=۱۳$$

۲۸.

داریم:

$$n(B-A)=۷\ ,\ n(A-B)=۱۰\ ,\ n(A)=۱۴$$

می‌دانیم $n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$، بنابراین:

$$۱۴=۱۰+n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

همچنین:

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=۷+۴=۱۱$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۴+۱۱-۴=۲۱$$

۲۹.

$$A\cup B=A-B\Rightarrow n(A\cup B)=n(A-B)$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$
$$\Rightarrow n(B-A)+n(A\cap B)=۰\Rightarrow n(B)=۰\Rightarrow B=\phi$$

۳۰.

$$A-B=A\Rightarrow n(A-B)=n(A)$$
$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۰$$

از طرفی داریم:

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(B-A)=n(B)$$

پس:

$$B-A=B$$

۳۱.

الف) بدیهی است که:

$$(B-A)\cap(A\cap B)=\phi$$
$$\Rightarrow n((B-A)\cup(A\cap B))=n(B-A)+n(A\cap B)=n(B)=۸$$

ب) می‌دانیم $A\cap B\subseteq A$

پس:

$$A\cup(A\cap B)=A\Rightarrow n\big(A\cup(A\cap B)\big)=n(A)=۶$$

۳۲. ابتدا مجموعه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$A=\{$افرادی که نوشیدنی میوه‌ای دوست دارند$\}$

$B=\{$افرادی که نوشیدنی کافئین‌دار دوست دارند$\}$

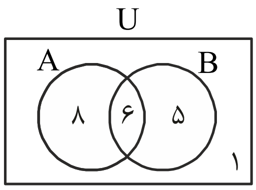
الف) منظور این سوال پیدا کردن $n(A-B)$ است.

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۴-۶=۸$$

ب) منظور این سوال پیدا کردن $n(A\cup B)$ است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۴+۱۱-۶=۱۹$$

ج) منظور این سوال پیدا کردن $n(A\cup B')$ است و می‌توان آن را با رسم نمودار ون حل کرد.



$$n(A\cup B')=n(A)+n(B')-n(A\cap B')$$
$$=۱۴+۹-۸=۱۵$$

۳۳. ابتدا جدول مربوط به نمایش اطلاعات الگوی هندسی را رسم می‌کنیم.

شماره شکل: n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد نقطه‌های هر شکل: a_n	۱	۵	۹	۱۳	?	?

با بسط دادن الگوهای هندسی می‌بینیم تعداد نقطه‌های شکل پنجم، ۱۷ و تعداد نقطه‌های شکل ششم ۲۱ است.

حال می‌توانیم فرمولی که رابطه‌ی نقاط را نشان می‌دهد، بیابیم.

تعداد نقطه‌های هر شکل = ۴× شماره‌ی شکل −۳

$$\Rightarrow a_n=۴n-۳$$

بنابراین الگو خطی است.

.۳۴

مانند همیشه، اطلاعات مربوط به شکل را در جدولی نمایش می‌دهیم.

شماره شکل: n	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره‌های هر شکل: a_n	۱	۳	۵	۷

تعداد دایره‌های هر شکل را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم.

$$a_۱ = ۱ = ۲\times(۱) - ۱$$
$$a_۲ = ۳ = ۲\times(۲) - ۱$$
$$a_۳ = ۵ = ۲\times(۳) - ۱$$
$$a_۴ = ۷ = ۲\times(۴) - ۱$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow a_n = ۲\times(n) - ۱$$

بنابراین $a_n = ۲n - ۱$ و الگوی داده شده خطی است.

.۳۵

$$n = ۱ \Rightarrow ۵\times(۱) + a_۱ = ۱۶ \Rightarrow a_۱ = ۱۱$$
$$n = ۲ \Rightarrow ۵\times(۲) + a_۲ = ۱۶ \Rightarrow a_۲ = ۶$$
$$n = ۳ \Rightarrow ۵\times(۳) + a_۳ = ۱۶ \Rightarrow a_۳ = ۱$$

n	۱	۲	۳
a_n	۱۱	۶	۱

.۳۶

جملات جدول داده شده را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

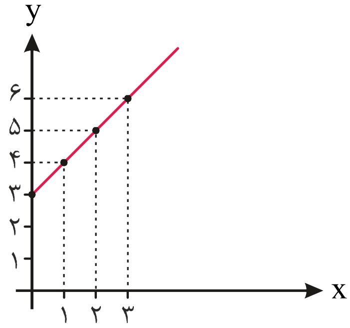
$$a_۱ = ۳\times(۱) + ۲$$
$$a_۲ = ۳\times(۲) + ۲$$
$$a_۳ = ۳\times(۳) + ۲$$
$$a_۴ = ۳\times(۴) + ۲$$
$$a_۵ = ۳\times(۵) + ۲$$
$$\vdots$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = ۳n + ۲$$

۳۷.

زوج مرتب‌های $(۱,۴)$، $(۲,۵)$، $(۳,۶)$، $(۴,۷)$ و $(۵,۸)$ روی صفحه مختصات نشان داده شده است.



این نقاط روی خط $y=x+۳$ قرار دارند. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله $a_n=n+۳$ است.

۳۸.

مانند همیشه جدول مربوط به اطلاعات دنباله را می‌نویسیم:

بسط جمله‌ی a_n	a_n
$(-۱)^{۱+۱}\dfrac{(۱)^۲}{۱+۱}$	$\dfrac{۱}{۲}$
$(-۱)^{۲+۱}\dfrac{(۲)^۲}{۲+۱}$	$-\dfrac{۴}{۳}$
$(-۱)^{۳+۱}\dfrac{(۳)^۲}{۳+۱}$	$\dfrac{۹}{۴}$
$(-۱)^{۴+۱}\dfrac{(۴)^۲}{۴+۱}$	$-\dfrac{۱۶}{۵}$
	$\vdots$
$(-۱)^{n+۱}\dfrac{n^۲}{n+۱}$	a_n

درنتیجه: $a_n=(-۱)^{n+۱}\dfrac{n^۲}{n+۱}$ است.

$$a_{۲۰}=(-۱)^{۲۱}\times\frac{(۲۰)^۲}{۲۱}=-\frac{۴۰۰}{۲۱}$$

.۳۹

$$b_8 = b_7 + b_6$$

بنابراین باید جمله‌های b_3، b_4، b_5، b_6 و b_7 را به‌دست آوریم:

$$b_3 = b_2 + b_1 = 3 + 3 = 6$$

$$b_4 = b_3 + b_2 = 6 + 3 = 9$$

$$b_5 = b_4 + b_3 = 9 + 6 = 15$$

$$b_6 = b_5 + b_4 = 15 + 9 = 24$$

$$b_7 = b_6 + b_5 = 24 + 15 = 39$$

بنابراین:

$$b_8 = b_7 + b_6 = 39 + 24 = 63$$

.۴۰

برای حل این سوال ابتدا جدول مربوط به اطلاعات این دونباله را رسم می‌کنیم و بعد جمله‌ی عمومی آن را تعیین می‌کنیم:

بسط جمله‌ی a_n	**a_n**
$(1)^2$	$a_1 = 1$
$(2)^2$	$a_2 = 1 + (2(2) - 1) = 4$
$(3)^2$	$a_3 = 4 + (2(3) - 1) = 9$
$(4)^2$	$a_4 = 9 + (2(4) - 1) = 16$
$\vdots$	$\vdots$
(n^2)	$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$

بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n = n^2$ است.

.۴۱

باتوجه به ضابطه‌ی دنباله داریم:

$$a_{۵}=\frac{(۵)^{۲}-۱}{۴}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$
$$a_{۶}=\frac{(۶)^{۲}}{۸}=\frac{۳۶}{۸}=\frac{۹}{۲}$$
$$a_{۵}+a_{۶}=۶+\frac{۹}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

.۴۲

برای این‌که $a_{۱۱}$ را به‌دست بیاوریم، باید قرار دهیم.

$۲n+۵=۱۱$ (چرا؟)

$$۲n+۵=۱۱ \Rightarrow n=۳$$
$$a_{۲n+۵}=\frac{n^{۳}+۱}{۲n-۱} \xrightarrow{n=۳} a_{۱۱}=\frac{(۳)^{۳}+۱}{۲(۳)-۱}=\frac{۲۸}{۵}$$

.۴۳

$$n=۱ \Rightarrow a_{n}=۲(۳^{۱-۱})=۲$$
$$n=۲ \Rightarrow a_{۲}=۲(۳^{۲-۱})=۶$$
$$n=۳ \Rightarrow a_{۳}=۲(۳^{۳-۱})=۱۸$$
$$n=۴ \Rightarrow a_{۴}=۲(۳^{۴-۱})=۵۴$$
$$n=۵ \Rightarrow a_{۵}=۲(۳^{۵-۱})=۱۶۲$$

داریم:

۲ ,۶ ,۱۸ ,۵۴ ,۱۶۲

.۴۴ همان‌طور که قبلاً گفتیم برای مشخص شدن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی کافی است که جمله‌ی اول و قدر نسبت آن را داشته باشیم. بنابراین:

$$t_{n}=۶۳+(n-۱)\times(-۴)=۶۷-۴n$$

.۴۵

دنباله‌ی (الف) یک دنباله حسابی است. زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن مقدار ثابت است قدر نسبت این دنباله عدد ۲ است. ولی در دنباله (ب) داریم:

$$t_{۲}-t_{۱}=۳$$
$$t_{۳}-t_{۲}=۵$$

تفاضل دو جمله متوالی این دنباله مقدار ثابتی نشد. بنابراین این دنباله، یک دنباله حسابی نیست.

.۴۶

برای این که سه جمله تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، باید تفاضل هردو جمله‌ی متوالی آن‌ها مقدار ثابتی باشد.

بنابراین داریم:

$$q+۵-(۴q+۳)=۴q+۳-(q-۲۰)$$
$$\Rightarrow\ -۳q+۲=۳q+۲۳\Rightarrow -۶q=۲۱\Rightarrow q=\frac{-۷}{۲}$$

.۴۷

در این سؤال باید در رابطه‌ی $t_n=a+(n-۱)d$، مقدار n را به‌دست بیاوریم.

$$۹۱=۳+(n-۱)\times ۱۱\Rightarrow \boxed{n=۹}$$

.۴۸

داریم:

$$t_۵+t_۶=۳\Rightarrow a+۴d+a+۵d=۳$$
$$t_۸+t_۹=-۲\Rightarrow a+۷d+a+۸d=-۲$$
$$\begin{cases} ۲a+۹d=۳ \\ ۲a+۱۵d=-۲ \end{cases}\Rightarrow\ d=-\frac{۵}{۶}\ ,\ a=\frac{۲۱}{۴}$$
$$t_{۱۳}+t_{۱۵}=a+۱۲d+a+۱۴d=۲a+۲۶d$$
$$=۲\times(\frac{۲۱}{۴})+۲۶\times(-\frac{۵}{۶})=\frac{۶۷}{۶}$$

.۴۹

داریم:

$$t_۷-t_۱=۷۲۰\Rightarrow a+۶d-a=۷۲۰$$
$$\Rightarrow d=۱۲۰$$

.۵۰

$$\begin{matrix} t_۳=۸\Rightarrow ۸=a+۲d \\ t_۶=۱۷\Rightarrow ۱۷=a+۵d \end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix} d=۳ \\ a=۲ \end{matrix}$$

حال می‌توانیم $t_{۱۴}$ را به‌دست آوریم.

$$t_{۱۴}=۲+۱۳\times۳=۴۱$$

.۵۱

$$t_۶=a+۵d=۳x+۱+۵(۲x+۶)=۱۳x+۳۱$$

۵۲.

داریم:

$$t_n = ۶n + ۳$$

پس:

$$۶n + ۳ = a + (n - ۱)d = a - d + nd$$

بنابراین $d = ۶$ است و $a = ۹$.

۵۳.

فرض کنید x، y و z تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند. طبق تعریف دنباله‌ی حسابی داریم:

$$\ldots, x, y, z, \ldots$$
$$x = y - d \quad , \quad z = y + d$$

می‌دانیم مجموع این سه عدد ۲۱ شده است.

پس داریم:

$$x + y + z = ۲۱$$
$$\Rightarrow (y - d) + y + (y + d) = ۲۱ \Rightarrow \ y = ۷$$

همچنین در صورت سؤال گفته شده است:

$$xyz = ۲۳۱ \rightarrow (۷ - d) \times ۷ \times (۷ + d) = ۲۳۱$$
$$\Rightarrow ۴۹ - d^۲ = \frac{۲۳۱}{۷} = ۳۳ \Rightarrow d^۲ = ۱۶ \Rightarrow d = \pm ۴$$

اگر $d = ۴$ باشد این سه عدد به صورت زیر هستند.

$$\ldots, ۳, ۷, ۱۱, \ldots$$

اگر $d = -۴$ باشد، ترتیب سه عدد مانند زیر است.

$$\ldots, ۱۱, ۷, ۳, \ldots$$

۵۴.

طبق اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\frac{۱۹}{t_۱}, \frac{}{t_۲}, \frac{}{t_۳}, \frac{}{t_۴}, \frac{}{t_۵}, \frac{۳۹}{t_۶}$$
$$۳۹ = ۱۹ + ۵d \Rightarrow d = ۴$$

بنابراین:

$$t_۲ = ۱۹ + ۴ = ۲۳$$
$$t_۳ = ۲۳ + ۴ = ۲۷$$
$$t_۴ = ۲۷ + ۴ = ۳۱$$
$$t_۵ = ۳۱ + ۴ = ۳۵$$
$$t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ = ۲۳ + ۲۷ + ۳۱ + ۳۵ = ۱۱۶$$

۵۵.

دنباله‌ی حسابی مربوط به زمان راه رفتن پدر علی به صورت زیر است:

$۱۲,۱۸,۲۴,...$

قدر نسبت این دنباله ۶است.

جدول اطلاعات مربوط به این سؤال را رسم می‌کنیم.

n: تعداد هفته‌های سپری شده	۱	۲	۳	۴
a_n: زمان راه رفتن در هفته‌ی nام	۱۲	۱۸	۲۴	?

هدف سؤال این است، که پیدا کنیم که در هفته‌ی چندم (n)، پدر علی ۶۰دقیقه راه می‌رود.

$$۶۰=۱۲+(n-۱)\times ۶ \Rightarrow n=۹$$

۵۶.

هزینه‌های پرداخت شده تشکیل یک دنباله‌ی عددی با قدر نسبت $d=۹۰۰۰$ می‌دهند.

قصد داریم از رابطه‌ی $a_n=a+(n-۱)d$ استفاده کنیم. چون جمله‌ی اول از ۳۳شروع می‌شود. بنابراین برای محاسبه‌ی هزینه‌های مربوط به ۶۰ نفر مهمان باید $a_{۲۸}$ $(۶۰-۳۳+۱=۲۸)$ را حساب کنیم.

$$a_{۲۸}=۵۰۰۰۰۰+۲۷\times ۹۰۰۰=۷۴۳۰۰۰$$

۵۷. اگر حقوق شخص را در سال اول a در نظر بگیریم، حقوق در سال دوم به‌صورت $a+\frac{۷}{۱۰۰}a$ است.

یعنی $۱/۰۷a$ می‌شود و در سال nام $(۱/۰۷)^{n-۱}a$ است.

بنابراین یک دنباله هندسی داریم که جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $t_n=۸۰۰۰۰۰\times(۱/۰۷)^{n-۱}$ است.

پس:

$$t_۶=۸۰۰۰۰۰\times(۱/۰۷)^۵=۱۱۲۲۰۴۱/۳۸۴۵۶$$

یعنی حقوق بعد از ۶سال تقریباً ۱/۱۲۲/۰۰۰تومان است.

۵۸.

داریم:

$$t_۱=۲\,,\ t_۲=۸\,,\ t_۳=۳۲$$

$$\frac{t_۳}{t_۲}=۴ \quad , \quad \frac{t_۲}{t_۱}=۴$$

بنابراین دنباله داده شده، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $r=۴$ است. باید n را به دست آوریم.

$$t_n=۲۰۴۸=۲\times(۴)^{n-۱}$$

۲۰۴۸ را تجزیه می‌کنیم. داریم: $۲۰۴۸=۲^{۱۱}$. پس:

$$۲^{۱۱}=۲\times(۲^۲)^{n-۱}=۲^{۲n-۱}$$

$$\Rightarrow ۲n-۱=۱۱ \Rightarrow \boxed{n=۶}$$

۵۹.

$$t_1 = a$$
$$t_7 = a \times (2)^6$$
$$t_2 = a \times 2$$

بنابراین:

$$\frac{t_1 t_7}{(t_2)^2} = \frac{a \times a \times 2^6}{(a \times 2)^2} = \frac{2^6}{2^2} = 2^4 = 16$$

۶۰.

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$t_9 = 5t_6 \Rightarrow ar^8 = 5(ar^5) \Rightarrow r^3 = 5$$
$$\frac{t_{11}}{t_5} = \frac{\cancel{a}r^{10}}{\cancel{a}r^4} = r^6 = (r^3)^2 = (5)^2 = 25$$

۶۱.

داریم:

$$\underset{t_1}{3}, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \underset{t_7}{192}$$
$$t_7 = ar^6 \Rightarrow 192 = 3 \times r^6 \Rightarrow r^6 = 64 = 2^6 \Rightarrow r = \pm 2$$

با توجه به صورت سؤال $r = -2$ را در نظر می‌گیریم.

$$t_2 = -6$$
$$t_3 = 12$$
$$t_4 = -24$$
$$t_5 = 48$$
$$t_6 = -96$$
$$t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = -6 + 12 - 24 + 48 - 96 = -66$$

۶۲.

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{-6}{3} = -2$$
$$t_n = ar^{n-1} = 3 \times (-2)^{n-1}$$

۶۳.

ابتدا جمله‌ی‌هفتم دنباله دوم را حساب می‌کنیم.

$$t_7 = a(27)^6 = a(3^3)^6 = a \times 3^{18}$$

حال این عبارت را با جمله‌ی nام از دنباله اول برابر قرار می‌دهیم. تا مقدار n به‌دست بیاید.

$$a \times 3^{18} = a \times (-3)^{n-1}$$

نتیجه می‌گیریم $n = 19$.

.۶۴

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$t_۴=\frac{۴}{۳}\ ,\quad t_۷=\frac{۳۲}{۸۱}$$

$$\Rightarrow ar^۳=\frac{۴}{۳}\ ,\quad ar^۶=\frac{۳۲}{۸۱}$$

طرفین تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{ar^۶}{ar^۳}=\frac{\frac{۳۲}{۸۱}}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳۲\times ۳}{۸۱\times ۴}=\frac{۸}{۲۷}=(\frac{۲}{۳})^۳$$

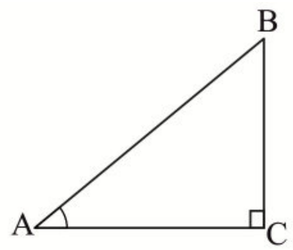
$$\Rightarrow r^۳=(\frac{۲}{۳})^۳ \Rightarrow \boxed{r=\frac{۲}{۳}}$$

.۶۵

$$\tan a=\frac{۲}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow a=۳۰^\circ$$

.۶۶

باتوجه به صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



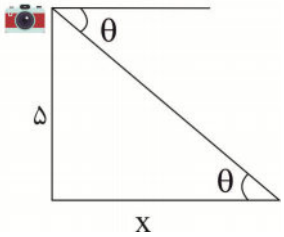
$$\text{Sin}\,A=\frac{BC}{AB}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow BC=۲x\ ,\ AB=۳x$$

از طرفی داریم:

$$AC=\sqrt{(AB)^۲-(BC)^۲}=\sqrt{۵}x$$

$$\Rightarrow \tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

.۶۷



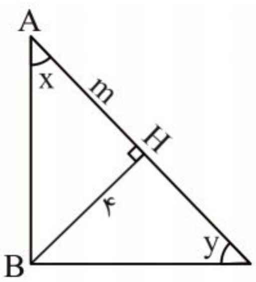
$\theta = ۲۴ \Rightarrow \tan\theta \simeq ۰/۴۴$

$۰/۴۴ = \frac{۵}{x} \Rightarrow x = \frac{۵}{۰/۴۴} \simeq ۱۱/۳۶$

.۶۸

شکل زیر را داریم:

رأس‌های مثلث را نام‌گذاری می‌کنیم.



در مثلث ABH، داریم:

$\cot x = \frac{m}{۴} \rightarrow m = ۴\cot x$

حال در مثلث ABC، $\cot x = \tan y$ در نتیجه

$m = ۴\tan y$

.۶۹

$$\left.\begin{array}{l} \text{ABH} \quad \text{در} \quad : \sin B = \frac{۲}{AB} \\ \text{ABC} \quad \text{در} \quad : \sin B = \frac{۵}{BC} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{۲}{AB} = \frac{۵}{\sqrt{AB^۲ + AC^۲}} \Rightarrow \frac{۲}{AB} = \frac{۵}{\sqrt{AB^۲ + ۲۵}}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{AB^۲ + ۲۵} = ۵AB \Rightarrow ۴AB^۲ + ۱۰۰ = ۲۵AB^۲ \Rightarrow ۲۱AB^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AB = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲۱}} = \frac{۱۰۰\sqrt{۲۱}}{۲۱}$$

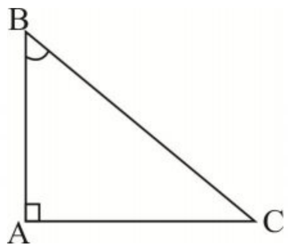
۷۰.

الف) $\text{Sin}\,۳۰^\circ + \text{Cos}\,۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$

ب) $\tan ۴۵^\circ + \text{Cos}\,۳۰^\circ - \text{Sin}\,۴۵^\circ = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$

۷۱.

چون می‌دانیم اندازه اضلاع کمتر از ۱۰ است .



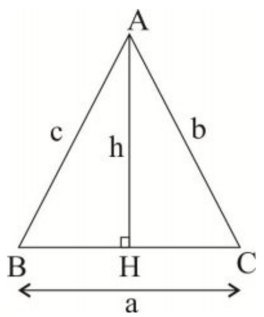
$$\text{Cot}B = \frac{۱۲}{۹} = \frac{۴}{۳} = \frac{\text{B ضلع مجاور به}}{\text{B ضلع مقابل به}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \begin{matrix} AB = ۴ \\ AC = ۳ \end{matrix}$$

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۱۶ + ۹ = BC^۲ \Rightarrow BC = ۵$$

$$\text{Sin}\,C = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

۷۲.

ابتدا ارتفاع AH را برای مثلث ABC رسم می‌کنیم.



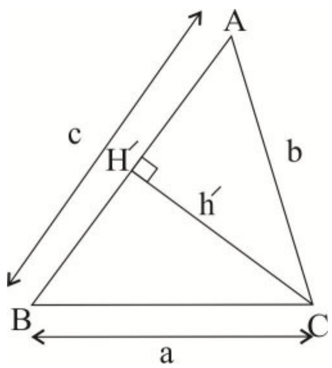
داریم:

$$\left.\begin{matrix} \text{Sin}\,B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\,\text{Sin}\,B \\ \text{Sin}\,C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\,\text{Sin}\,C \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\,\text{Sin}\,B = b\,\text{Sin}\,C$$

در نتیجه:

$$\frac{\text{Sin}\,c}{C} = \frac{\text{Sin}\,B}{b} \quad (۱)$$

حال ارتفاع 'CH را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{matrix} \text{Sin}\,A = \frac{h'}{b} \Rightarrow h' = b\,\text{Sin}\,A \\ \text{Sin}\,B = \frac{h'}{a} \Rightarrow h' = a\,\text{Sin}\,B \end{matrix}\right\} \Rightarrow b\,\text{Sin}\,A = a\,\text{Sin}\,B$$

در نتیجه:

$$\frac{\text{Sin A}}{a}=\frac{\text{Sin B}}{b} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\text{Sin A}}{a}=\frac{\text{Sin B}}{b}=\frac{\text{Sin C}}{c}$$

.۷۳

طبق رابطه به‌دست آمده در سوال ۸ داریم:

$$\frac{\text{Sin B}}{۸}=\frac{\text{Sin }۳۰^\circ}{۶}$$

$$\Rightarrow \text{Sin B}=\frac{۸\text{Sin }۳۰^\circ}{۶}=\frac{۸\times\frac{۱}{۲}}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

.۷۴

$$\frac{AB}{\text{Sin }۳۰^\circ}=\frac{۳\sqrt{۲}}{\text{Sin }۴۵^\circ}\Rightarrow AB=۳$$

.۷۵

اگر فاصله قایق تا فانوس دریایی را x فرض کنیم، داریم:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{۱۲۰}{x}=۰/۲۶\Rightarrow x\simeq ۴۶۱/۵۳$$

.۷۶

باتوجه به این که $\sin\theta\ \tan\theta<۰$ است، یعنی این دو هم علامت نیستند.

تنها در ربع دوم و سوم $\sin\theta$ و $\tan\theta$ دارای علامت‌های مختلفی هستند.

.۷۷

می‌دانیم همواره $-۱\le\cos x\le ۱$، بنابراین:

$$-۱\le ۲m-۴\le ۱\rightarrow ۳\le ۲m\le ۵\Rightarrow \frac{۳}{۲}\le m\le\frac{۵}{۲}$$

.۷۸

$$-۱\le\cos\theta\le ۱\xrightarrow{+۳}۲\le ۳+\cos\theta\le ۴\longrightarrow\frac{۱}{۴}\le\frac{۱}{۳+\cos\theta}\le\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)}-۱\le\frac{-۲}{۳+\cos\theta}\le-\frac{۱}{۲}$$

کمترین مقدار: -۱

بیشترین مقدار: $-\frac{۱}{۲}$

۷۹.

مخرج کسر عبارت داده شده منفی است. (چرا؟) در نتیجه در نامساوی $\frac{\cos\theta}{\sin\theta-۱}<۰$ باید $\cos\theta>۰$ باشد. بنابراین θ در ناحیه اول یا چهارم قرار دارد.

۸۰.

$$A=\cos^{۲}\theta-۴\cos\theta+۳=\cos^{۲}\theta-۴\cos\theta+۴-۴+۳$$
$$=(\cos\theta-۲)^{۲}-۱\Rightarrow A=(\cos\theta-۲)^{۲}-۱$$

از طرفی

$$-۱\le\cos\theta\le۱\xrightarrow{-۲}-۳\le\cos\theta-۲\le-۱$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۱\le(\cos\theta-۲)^{۲}\le۹\xrightarrow{-۱}۰\le(\cos\theta-۲)^{۲}-۱\le۸$$

بنابراین بیشترین مقدار A برابر با ۸ است.

۸۱.

کافی است به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌ها نگاه کنیم.

$\cot ۳۵۰^\circ<\sin ۶۰^\circ$ ✓

$\tan ۲۰^\circ<\tan ۱۰۰^\circ$ ✗

$\sin ۸۰^\circ<\tan ۳۱۰^\circ$ ✗

$\tan ۱۲۰^\circ>\tan ۲۶۰^\circ$ ✗

$\cos ۱۱۰^\circ<\sin ۱۱۰^\circ$ ✓

$\sin ۳۰^\circ<\sin ۲۹۰^\circ$ ✗

$\cos ۳۴۰^\circ>\cos ۱۰۰^\circ$ ✓

۸۲.

چون y منفی است، پس θ در ربع سوم یا ربع چهارم است. با توجه به این که θ در ربع چهارم نیست، پس θ حتماً در ربع سوم است.

$$x^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}+\frac{۹}{۲۵}=۱\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow x=-\frac{۴}{۵}$$

زیرا در ربع سوم x منفی است.

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=\frac{۳}{۴}$$

۸۳.

چون نقطه x روی نیمساز ربع اول می‌باشد، پس $y=x$. بنابراین:

$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{x}{x}=۱$$

.۸۴

$۳x+۲y=۵ \Rightarrow ۲y=-۳x+۵ \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲} \Rightarrow$ شیب خط $=-\frac{۳}{۲}$

$\tan\alpha=-\frac{۳}{۲}$

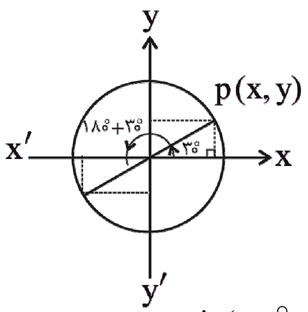
.۸۵

$m=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

از طرفی می‌دانیم $y-y_۰=m(x-x_۰)$، در نتیجه داریم:

$y-۱=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+۱ \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۳}$

.۸۶



همان‌طوکه می‌بینیم $\sin\theta \le ۰$است.

بنابراین θمی‌تواند در ناحیه‌های سوم و چهارم باشد. θ را قرار می‌دهیم.

$\theta=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$

همان‌طور که در شکل می‌بینید

$\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\sin(۳۰^\circ)=-\frac{۱}{۲}$

$\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cos(۳۰^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\Rightarrow \sin ۲۱۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$ و $-\sqrt{۱-\cos^۲ ۲۱۰^\circ}=-\sqrt{۱-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}=-\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$

مشاهده کردید که زاویه ۲۱۰° در رابطه داده شده صورت سؤال صدق می‌کند.

.۸۷

الف) طرف چپ : $\cos\theta\ \tan\theta=\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta$:طرف راست

ب) طرف چپ : $\frac{\tan\theta}{\cot\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{۱}{\tan\theta}}=\tan^۲\theta$:طرف راست

ج) $\frac{\cos^۲\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{(۱-\sin\theta)\cancel{(۱+\sin\theta)}}{\cancel{(۱+\sin\theta)}}=۱-\sin\theta$

د) $\sin^۴\theta-\cos^۴\theta=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta$

و) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\cot\theta}}{1+\dfrac{1}{\cot\theta}}=\dfrac{\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta}}{\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta}}=\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$

هـ) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=\dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=\dfrac{\sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}$

$=-\tan^2\theta=-(\tan^2\theta+1-1)=-(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1)=1-\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1-\sec^2\theta$

ی) $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow\sin^2\theta=\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}$

$\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}}}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}}}=\pm\sqrt{\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=\pm\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

ن) $\dfrac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\theta-\cot\theta$

.۸۸

$1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a}\Rightarrow\sin^2 a=\dfrac{1}{1+\cot^2 a}\xrightarrow{\text{در ناحیه اول } a}\sin a=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$

$\Rightarrow\sin a=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{7}{9}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{16}{9}}}\Rightarrow\sin a=\dfrac{3}{4}$

.۸۹

در ناحیه دوم $x\Rightarrow\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\dfrac{3}{5}}{-\dfrac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

.۹۰

$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\xrightarrow{\text{در ناحیه سوم } x}\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+4}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

در ناحیه سوم $\Rightarrow\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\dfrac{5}{25}}=-\sqrt{\dfrac{20}{25}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

.۹۱

$$\sqrt{\frac{۱+\sin a}{۱-\sin a}\times\frac{۱+\sin a}{۱+\sin a}}=\sqrt{\frac{(۱+\sin a)^{۲}}{۱-\sin^{۲} a}}=\sqrt{\frac{(۱+\sin a)^{۲}}{\cos^{۲} a}}=\frac{|۱+\sin a|}{|\cos a|}$$

a در ناحیه دوم است، پس $|\cos a|=-\cos a$، چون $\cos a$ در ناحیه دوم منفی است، باتوجه به این‌که $۱+\sin a$ عبارتی همواره مثبت است، پس $|۱+\sin a|=۱+\sin a$ بنابراین:

$$\sqrt{\frac{۱+\sin a}{۱-\sin a}}+\frac{۱-\sin a}{\cos a}=\frac{۱+\sin a}{-\cos a}+\frac{۱-\sin a}{\cos a}=\frac{-۱-\sin a+۱-\sin a}{\cos a}=\frac{-۲\sin a}{\cos a}=-۲\tan a$$

.۹۲

زاویه ۲۰۲° در ربع سوم است، در نتیجه سینوس آن منفی است. در درس گذشته نشان دادیم $\cos(-\theta)=\cos\theta$ پس $\cos(-۲۲^\circ)=\cos ۲۲^\circ$ و همچنین زاویه ۲۲° در ربع اول قرار می‌گیرد، بنابراین سینوس آن مثبت است. داریم:

$$\frac{\cos(-۲۲^\circ)+\sin(۲۰۲^\circ)}{\sin(۳۸۲^\circ)}=\frac{\cos(-۲۲^\circ)+\sin(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)}{\sin(۳۶۰^\circ+۲۲^\circ)}=\frac{\cos ۲۲^\circ-\sin ۲۲^\circ}{\sin ۲۲^\circ}$$

$$=\frac{\cos ۲۲^\circ}{\sin ۲۲^\circ}-\frac{\sin ۲۲^\circ}{\sin ۲۲^\circ}=\cot ۲۲^\circ-۱=\frac{۱}{\tan ۲۲^\circ}-۱=\frac{۵}{۲}-۱=\frac{۳}{۲}$$

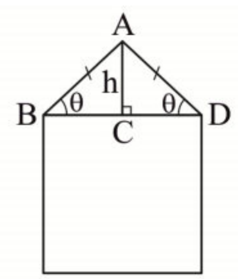
.۹۳

$$\frac{\cos^{۳} x-\sin^{۳} x}{۱+\sin x\cos x}=\frac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^{۲} x+\sin^{۲} x+\cos x\sin x\right)}{۱+\sin x\cos x}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(۱+\cos x\sin x)}{۱+\cos x\sin x}=\cos x-\sin x$$

.۹۴

دو مثلث ABC و ACD هم نهشت‌اند.



$\cos ۴۳^\circ=۰/۷$

می‌دانیم:

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{(0/7)^2}\Rightarrow \tan^2\theta=\frac{1}{(0/7)^2}-1=\frac{51}{49}\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\tan\theta=\frac{h}{5}=\frac{\sqrt{51}}{7}\Rightarrow h=\frac{5\sqrt{51}}{7}\xrightarrow{\sqrt{51}\sim 7/1} h=5/07m$$

.۹۵

۱)

$$(0/2)^5=(2\times10^{-1})^5=32\times10^{-5}=0/32\times10^{-3}$$
$$(0/3)^3=(3\times10^{-1})^3=27\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow\ 0/32\times10^{-3}<27\times10^{-3}$$
$$(0/2)^5 < (0/3)^3$$

۲)

$$(0/1)^{10}=(1\times10^{-1})^{10}=10^{-10}=(\frac{1}{10})^{10}$$
$$(2)^1=2^1$$

$$\Rightarrow\ (\frac{1}{10})^{10}<2^1$$
$$(0/1)^{10} < (2)^1$$

۳)

$$\sqrt{0/0004}=\sqrt{4\times10^{-4}}=2\times10^{-2}=0/02$$
$$0/02$$

$$\Rightarrow\ 0/02=0/02$$
$$\sqrt{0/0004} = 0/02$$

۴)

$$\sqrt[5]{0/00001}=\sqrt[5]{1\times10^{-5}}=10^{-1}$$
$$\sqrt[4]{0/0001}=\sqrt[4]{1\times10^{-4}}=10^{-1}$$

$$\Rightarrow\ 10^{-1}=10^{-1}$$
$$\sqrt[5]{0/00001} = \sqrt[4]{0/0001}$$

.۹۶

عبارت‌های زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم.

$$1)\ \sqrt[5]{864}\times\sqrt[5]{46080}=\sqrt[5]{2^5\times3^3}\times\sqrt[5]{3^2\times2^{10}\times5}=\sqrt[5]{2^5\times3^5\times(2^2)^5\times5}=2\times3\times4\times\sqrt[5]{5}=24\sqrt[5]{5}$$

$$2)\ \sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$$

$$۳)\sqrt[۴]{۲۸۸}\times\sqrt[۴]{۸\times۹}=\sqrt[۴]{۲^۵\times۳^۲}\times\sqrt[۴]{۲^۳\times۳^۲}=\sqrt[۴]{۲^۸\times۳^۴}=\sqrt[۴]{(۲^۲)^۴\times۳^۴}=۲^۲\times۳=۱۲$$

$$۴)\sqrt[۳]{۴۰}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۵}=۲\sqrt[۳]{۵}$$

$$۵)\sqrt[۴]{۱/۶\times۱۰^{-۳}}=\sqrt[۴]{۱۶\times۱۰^{-۴}}=\sqrt[۴]{۲^۴\times۱۰^{-۴}}=۲\times۱۰^{-۱}=۰/۲$$

$$۶)۱۲۰=۲^۳\times۳\times۵\ \Rightarrow\ x^{۱۲۰}=((x^۸)^۳)^۵\ \Rightarrow\ \sqrt[۵]{x^{۱۲۰}}=\sqrt[۵]{((x^۸)^۳)^۵}=(x^۸)^۳$$

$$\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{x^{۱۲۰}}}}=\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{(x^۸)^۳}}=\sqrt[۲]{x^۸}\ \Rightarrow\ \sqrt[۲]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{x^{۱۲۰}}}}=\sqrt[۲]{x^۸}=\sqrt[۲]{(x^۴)^۲}=x^۴$$

$$۷)\sqrt[۴]{۸۰x^۵y^۳}=\sqrt[۴]{۲^۴\times۵\times x^۴\times x\times y^۳}=۲x\sqrt[۴]{۵xy^۳}$$

$$۸)\sqrt[۳]{۰/۰۰۰۲۱۶}=\sqrt[۳]{۲۱۶\times۱۰^{-۶}}=\sqrt[۳]{۶^۳\times۱۰^{-۶}}=۶\times۱۰^{-۲}=۰/۰۶$$

$$۹)\sqrt[۴]{۲۵۲+\sqrt[۳]{۵۲+\sqrt{۱۴۴}}}=\sqrt[۴]{۲۵۲+\sqrt[۳]{۵۲+۱۲}}=\sqrt[۴]{۲۵۲+۴}=\sqrt[۴]{۲۵۶}=۴$$

$$۱۰)\sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}}\times\sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}=\sqrt[۴]{(۱۰-\sqrt{۱۹})(۱۰+\sqrt{۱۹})}=\sqrt[۴]{۱۰۰-۱۹}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳$$

۹۷.

۱)

می‌دانیم:

$$۲^۵=۳۲<۶۸<۳^۵=۲۴۳$$

حدس ما برای جواب عدد ۲/۳ است، زیرا:

$$(۲/۳)^۵=۶۴/۳۶۳۴۳$$

بنابراین:

$$\sqrt[۵]{۶۸}\simeq۲/۳$$

۲)

می‌دانیم:

$$۳^۴=۸۱<۲۵۴<۲۵۶=۴^۴$$

حدس می‌زنیم، پاسخ عدد تقریبی ۳/۹ باشد، داریم:

$$(۳/۹)^۴=۲۳۱/۳۴۴۱$$

بنابراین:

$$\sqrt[۴]{۲۵۴}\simeq۳/۹$$

۹۸.

$$\frac{x^{۲}}{۱۲۸}=\frac{۱۶۲}{x} \Rightarrow x^{۳}=۱۶۲\times۱۲۸=۲\times۳^{۴}\times۲^{۶}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲\times۳^{۳}\times۳\times(۲^{۲})^{۳}}=۲^{۲}\times۳\times\sqrt[۳]{۶}=۱۲\sqrt[۳]{۶}$$

۹۹.

$$۱)\ \frac{۲^{۱}+۲^{۰}+۲^{-۱}}{۲^{-۲}+۲^{-۳}+۲^{-۴}}=\frac{\cancel{۲^{۱}+۲^{۰}+۲^{-۱}}}{۲^{-۳}(\cancel{۲^{۱}+۲^{۰}+۲^{-۱}})}=\frac{۱}{۲^{-۳}}=۲^{۳}=۸$$

$$۲)\ \sqrt{۸}+\sqrt{۱۸}=\sqrt{۲^{۳}}+\sqrt{۹\times۲}=۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

۱۰۰.

$$x^{۲}y+xy^{۲}+x+y=۱۶۸۰۷ \Rightarrow xy(x+y)+(x+y)=۷^{۵}$$

$$\Rightarrow (x+y)(xy+۱)=۷^{۵}$$

$$\Rightarrow (x+y)(۶+۱)=۷^{۵} \Rightarrow x+y=۷^{۴} \Rightarrow \sqrt[۴]{x+y}=۷$$

۱۰۱.

$$۱)\ (۱۲۵)^{x}\neq ۰$$

** اگر $b\neq ۰$ باشد و $ab=cb$ آن‌گاه $a=c$ است. **

$$(۲۵)^{x}\cancel{(۱۲۵)^{x}}=\cancel{(۱۲۵)^{x}}\left(\frac{۱}{۲۵}\right) \Rightarrow (۲۵)^{x}=۲۵^{-۱} \Rightarrow x=-۱$$

۲)

$$۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}+۲^{۸}=۲^{x} \Rightarrow ۸\times۲^{۸}=۲^{x}$$

$$\Rightarrow ۲^{۳}\times۲^{۸}=۲^{x} \Rightarrow ۲^{۱۱}=۲^{x} \Rightarrow x=۱۱$$

۱۰۲.

$$x^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow x=\pm۱۰$$

چون $x^{۳}\neq ۱۰۰۰$ است، بنابراین تنها مقدار $x=-۱۰$ قابل قبول است.

پس:

$$x^{۵}=(-۱۰)^{۵}=-۱۰۰۰۰۰$$

.۱۰۳

$$\frac{۱}{x^{۳}}-\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x}-۱=۰ \Rightarrow \frac{۱-x-x^{۲}-x^{۳}}{x^{۳}}=۰$$
$$\Rightarrow ۱-x-x^{۲}-x^{۳}=۰$$
$$\Rightarrow ۱-x-x^{۲}-x^{۳}=-(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)+۲=۰$$
$$\Rightarrow (x^{۳}+x^{۲}+x+۱)=۲ \Rightarrow (x^{۳}+x^{۲}+x+۱)^{۱۰}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

.۱۰۴

$$\left((\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}=۱۶ \Rightarrow (\sqrt{x})^{x}=۲^{۴} \Rightarrow x=۴$$

.۱۰۵

مساحت فرش: $(۱۰-۲\sqrt{۲/۲۵})(۶-۲\sqrt{۲/۲۵})=۲۱$

.۱۰۶

$$-۳\sqrt{۱۶۰}+۸\sqrt{۴۰}+\sqrt{۹۰}=-۳\times۴\sqrt{۱۰}+۸\times۲\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۱۰}$$
$$=-۱۲\sqrt{۱۰}+۱۶\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۱۰}=۷\sqrt{۱۰}$$

.۱۰۷

الف) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۵^{۲}}\times\sqrt[۳]{۵^{۱۰}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۵^{۱۲}}}=\sqrt[۴]{۵^{۴}}=۵$

ب) $a>۱ \Rightarrow \sqrt{a}-۱>۰$

$$\frac{\sqrt[۶]{(\sqrt{a}-۱)^{۶}}}{\sqrt{a}-۱}=\frac{\sqrt{a}-۱}{\sqrt{a}-۱}=۱$$

ج) $\sqrt[۱۱]{b^{۱۰}\sqrt[۵]{b^{۲}\sqrt[۶]{b^{۱۸}}}}=\sqrt[۱۱]{b^{۱۰}\sqrt[۵]{b^{۲}\,b^{۳}}}=\sqrt[۱۱]{b^{۱۰}\times b}=b$

د) $\frac{x^{۲}\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\frac{\sqrt[۳]{(x^{۲})^{۳}x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۶}x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\sqrt[۳]{\frac{x^{۷}}{x^{۱۰}}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^{۳}}}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{x})^{۳}}=\frac{۱}{x}$

و) $\sqrt[۵]{\frac{۳۲}{۲۴۳}}=\sqrt[۵]{\frac{۲^{۵}}{۳^{۵}}}=\sqrt[۵]{(\frac{۲}{۳})^{۵}}=\frac{۲}{۳}$

.۱۰۸

الف) $۳\sqrt[۴]{۴۰۵}+۵\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۸۰}+۴\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۴۰۵}+\sqrt[۴]{۸۰}$

$$=(۳-۱)\sqrt[۴]{۴۰۵}+(۵+۴)\sqrt[۴]{۵}+(-۲+۱)\sqrt[۴]{۸۰}$$
$$=۲\sqrt[۴]{۳^۴\times ۵}+۹\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۲^۴\times ۵}$$
$$=۲\times ۳\sqrt[۴]{۵}+۹\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۵}$$
$$=(۶+۹-۲)\sqrt[۴]{۵}$$
$$=۱۳\sqrt[۴]{۵}$$

ب) $\sqrt[۵]{a^۶b^۶}-۲b\sqrt[۵]{a^۶b}-۵\sqrt[۵]{a^۶b^۶}+۳a\sqrt[۵]{ab^۶}+۳ab\sqrt[۵]{ab}$

$$=(۱-۵)\sqrt[۵]{a^۵b^۵ab}-۲b\sqrt[۵]{a^۵ab}+۳a\sqrt[۵]{ab^۵b}+۳ab\sqrt[۵]{ab}$$
$$=-۴ab\sqrt[۵]{ab}-۲ab\sqrt[۵]{ab}+۳ab\sqrt[۵]{ab}+۳ab\sqrt[۵]{ab}$$
$$=(-۴-۲+۳+۳)\ ab\sqrt[۵]{ab}$$
$$=(۰)\,ab\sqrt[۵]{ab}$$
$$=۰$$

ج) $\dfrac{\sqrt[۵]{a^۳}\times\sqrt[۳]{a^۶}}{\sqrt[۷]{a^{۱۴}}\div\sqrt[۵]{a^۲}}=\dfrac{\sqrt[۵]{a^۳}\times\sqrt[۳]{a^۶}}{\dfrac{\sqrt[۷]{a^{۱۴}}}{\sqrt[۵]{a^۲}}}=\dfrac{\sqrt[۵]{a^۳}\times\sqrt[۳]{a^۶}\times\sqrt[۵]{a^۲}}{\sqrt[۷]{a^{۱۴}}}=\dfrac{\sqrt[۵]{a^۵}\times a^۲}{a^۲}=a$

.۱۰۹

$$\sqrt[۶]{x}=۴\Rightarrow(\sqrt[۶]{x})^۶=(۴)^۶\Rightarrow x=(۲^۲)^۶=۲^{۱۲}$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{۲^{۱۲}}=۲^۶=۶۴$$

.۱۱۰

داریم:

$$(\frac{۵}{۴})^{۴\times(\frac{۵}{۴})^۷}=(\frac{۵}{۴})^{۵x^۶}$$
$$\Rightarrow ۴\times(\frac{۵}{۴})^۷=۵x^۶\Rightarrow x^۶=\frac{۴}{۵}\times(\frac{۵}{۴})^۷=(\frac{۵}{۴})^۶\Rightarrow x=\pm\frac{۵}{۴}$$

.۱۱۱

الف) $\sqrt{۳۶x^۲y^۴}=(۳۶x^۲y^۴)^{\frac{۱}{۲}}=(۳۶)^{\frac{۱}{۲}}(x^۲)^{\frac{۱}{۲}}(y^۴)^{\frac{۱}{۲}}=۶xy^۲$

ب) $\sqrt[۳]{-۲۷a^۳b^۶}=(-۲۷a^۳b^۶)^{\frac{۱}{۳}}=(-۲۷)^{\frac{۱}{۳}}(a^۳)^{\frac{۱}{۳}}(b^۶)^{\frac{۱}{۳}}=-۳ab^۲$

ج) $(\sqrt[۱۰]{۲۵})^{۵}=((۲۵)^{\frac{۱}{۱۰}})^{۵}=۲۵^{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۵}{۱}}=۲۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$

د) $\sqrt[۵]{۹۹}\times(\sqrt[۳]{۹۹})^{۲}=(۹۹^{\frac{۱}{۵}})(۹۹^{\frac{۱}{۳}})^{۲}=۹۹^{\frac{۱}{۵}}\times ۹۹^{\frac{۲}{۳}}=۹۹^{\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۳}}=۹۹^{\frac{۱۳}{۱۵}}$

.۱۱۲

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۱۰۸}=\sqrt{۴\times۳}+\sqrt{۳۶\times۳}=۲\sqrt{۳}+۶\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}=\sqrt{۶۴\times۳}=\sqrt{۱۹۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt{N}=\sqrt{۱۹۲}\Rightarrow N=۱۹۲$$

.۱۱۳

$$(\sqrt[۳]{۲})^{۱۵}(\sqrt{۵})^{۶}=(۲^{\frac{۱}{۳}})^{۱۵}(۵^{\frac{۱}{۲}})^{۶}=(۲^{\frac{۱۵}{۳}})(۵^{\frac{۶}{۲}})$$

$$=(۲^{۵})(۵^{۳})=(۲^{۲})(۲^{۳})(۵^{۳})=(۲^{۲})\times(۱۰^{۳})=۴(۱۰۰۰)=۴۰۰۰$$

.۱۱۴

ابتدا ۰/۱۵ را به صورت کسری $\frac{۱۵}{۱۰۰}$ می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم.

$$\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow(۲^{\frac{۳}{۲۰}})^{b}=۲^{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۲۰}\times b=۴\Rightarrow b=۴\times\frac{۲۰}{۳}=\frac{۸۰}{۳}$$

.۱۱۵

$$\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۷+۳\sqrt{۵}}=\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۷+۳\sqrt{۵}}\times\frac{۷-۳\sqrt{۵}}{۷-۳\sqrt{۵}}=\frac{(۴+۲\sqrt{۵})(۷-۳\sqrt{۵})}{۷^{۲}-(۳\sqrt{۵})^{۲}}$$

$$=\frac{۲۸-۱۲\sqrt{۵}+۱۴\sqrt{۵}-۳۰}{۴۹-۴۵}=\frac{۲\sqrt{۵}-۲}{۴}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

.۱۱۶

$$(۲۵\sqrt{۵})^{x}=(\sqrt[۳]{۵})^{x+۱}$$

$$(۵^{۲}۵^{\frac{۱}{۲}})^{x}=(۵^{\frac{۱}{۳}})^{x+۱}$$

$$(۵^{\frac{۵}{۲}})^{x}=(۵^{\frac{۱}{۳}})^{x+۱}\Rightarrow\frac{۵}{۲}x=\frac{۱}{۳}(x+۱)$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۲}x=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۳})x=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۳}$$

.۱۱۷

الف) $\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}}}}} =$

$$\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳^{\frac{۳}{۲}}}}}}} = \sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳(۳^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}}}}} = \sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳^{\frac{۷}{۴}}}}}}$$

$$= \sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳(۳^{\frac{۷}{۴}})^{\frac{۱}{۲}}}}} = \sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳^{\frac{۱۵}{۸}}}}} = \sqrt{۳\sqrt{۳(۳^{\frac{۱۵}{۸}})^{\frac{۱}{۲}}}}$$

$$= \sqrt{۳\sqrt{۳^{\frac{۳۱}{۱۶}}}}$$

$$= \sqrt{۳(۳^{\frac{۳۱}{۱۶}})^{\frac{۱}{۲}}} = \sqrt{۳\times۳^{\frac{۳۱}{۳۲}}} = \sqrt{۳^{\frac{۶۳}{۳۲}}} = (۳^{\frac{۶۳}{۳۲}})^{\frac{۱}{۲}} = ۳^{\frac{۶۳}{۶۴}}$$

ب) $\sqrt[۷]{\left(\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{a^{۷}}}}\right)^{۴۵}} = \sqrt[۷]{\left(\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{a^{\frac{۷}{۳}}}}\right)^{۴۵}}$

$$= \sqrt[۷]{\left(\sqrt[۵]{(a^{\frac{۷}{۳}})^{\frac{۱}{۳}}}\right)^{۴۵}} = \sqrt[۷]{\left(\sqrt[۵]{a^{\frac{۷}{۹}}}\right)^{۴۵}} = \sqrt[۷]{\left(a^{\frac{۷}{۹}\times\frac{۱}{۵}}\right)^{۴۵}}$$

$$= \sqrt[۷]{\left(a^{\frac{۷}{۴۵}}\right)^{۴۵}} = \sqrt[۷]{a^{۷}} = a$$

.۱۱۸

الف) $\sqrt[۳]{۴}\times۲^{-\frac{۵}{۳}}\times\sqrt[۳]{۲}\times۲^{-\frac{۲}{۳}} = ۲^{\frac{۲}{۳}}\times۲^{-\frac{۵}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{-\frac{۲}{۳}} = ۲^{\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۳}+\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}} = ۲^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۲}}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}\times\frac{۱}{\sqrt[۸]{۳}}\times۳^{-\frac{۱}{۱۶}} = ۳^{-\frac{۱}{۲}}\times۳^{-\frac{۱}{۴}}\times۳^{-\frac{۱}{۸}}\times۳^{-\frac{۱}{۱۶}} = ۳^{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۶}} = ۳^{-\frac{۱۵}{۱۶}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۱۵}{۱۶}}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۶]{۳^{۱۵}}}$

۱۱۹.

توجه کنید:

می‌دانیم دو جمله‌ای‌های $A-B$ و $A+B$ را مزدوج می‌گویند، همچنین دوجمله‌ای‌هایی مانند« $a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$»، «$\sqrt{a}+\sqrt{b}$، $\sqrt{a}-\sqrt{b}$» و «$\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ و $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$» را مزدوج گوییم.

الف) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\left((\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\right)}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}-\sqrt{10}$$

ب) $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}\times\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{(\sqrt[4]{5})^2-(\sqrt[4]{3})^2}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}$$

ج) $$\frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}+4}=\frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}+4}\times\frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}-4}=\frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{(7\sqrt{5})^2-(4)^2}=\frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{245-16}=\frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{229}$$

۱۲۰.

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، طول ضلع مربع‌ها، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند، که قدر نسبت آن $r=\sqrt{2}$ است.

$$\sqrt{2},2,2\sqrt{2},4,\ldots$$

طول ضلع مربع ۱۸اُم، همان t_n است.

$$t_{18}=t_1r^{17}=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{17}=(\sqrt{2})^{18}=(2^{\frac{1}{2}})^{18}=2^9=512$$

۱۲۱.

جمعیت افراد این شهر، تشکیل یک دنباله هندسی با قدر نسبت $r=1/03$ می‌دهد.

$$t_3=250000\times(1/03)^2=250000\times1/0609=265225$$

۱۲۲.

$$(3+\sqrt{3})^3+(3-\sqrt{3})^3=(27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3})+(27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3})=4\times27=108$$

۱۲۳.

$$(3-2\sqrt{2})^3(\sqrt{2}+1)^6=(3-2\sqrt{2})^3\left[(\sqrt{2}+1)^2\right]^3=(3-2\sqrt{2})^3(3+2\sqrt{2})^3=(9-8)^3=1$$

.۱۲۴

$$\frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{x^{۴}+۱}{x^{۲}}=۳\Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=۳$$
$$\Rightarrow (x^{۲})+(\frac{۱}{x})^{۲}+۲(x)(\frac{۱}{x})-۲(x)(\frac{۱}{x})=۳\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲=۳$$
$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^{۲}=۵\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=\sqrt{۵}$$
$$A=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}=(x+\frac{۱}{x})(x^{۲}-۱+\frac{۱}{x^{۲}})=(x+\frac{۱}{x})(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۱)=(\sqrt{۵})(۳-۱)=۲\sqrt{۵}$$

.۱۲۵

داریم:

$$x^{۲}-۲x+۳=۰\Rightarrow x^{۲}+۳=۲x\Rightarrow x+\frac{۳}{x}=۲$$
$$x^{۲}+\frac{۹}{x^{۲}}+۲x\times\frac{۳}{x}=۴\Rightarrow x^{۲}+\frac{۹}{x^{۲}}+۶=۴\Rightarrow x^{۲}+\frac{۹}{x^{۲}}=-۲$$
$$x^{۳}+\frac{۲۷}{x^{۳}}=(x+\frac{۳}{x})(x^{۲}+\frac{۹}{x^{۲}}-۳)=(۲)(-۲-۳)=-۱۰$$

.۱۲۶

الف) $x^{۲}+۷x+۱۲=(x+۳)(x+۴)$

ب) $(x-y)^{۲}-(x-y)-۳۰=\left[(x-y)-۶\right]\left[(x-y)+۵\right]$

پ) $x^{۴}-۵x^{۲}+۴=(x^{۲}-۱)(x^{۲}-۴)=(x-۱)(x+۱)(x-۲)(x+۲)$

ت) $a^{۶}-۷a^{۳}-۸=(a^{۳}-۸)(a^{۳}+۱)=(a-۲)(a^{۲}+۲a+۴)(a+۱)(a^{۲}-a+۱)$

ث) $۹x^{۲}-۱۲xy+۴y^{۲}-۹=(۳x-۲y)^{۲}-۹=(۳x-۲y-۳)(۳x-۲y+۳)$

ج) $۸ax-bx+۸ay-by=x(۸a-b)+y(۸a-b)=(۸a-b)(x+y)$

چ) $x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱=x^{۳}(x^{۲}+x+۱)+(x^{۲}+x+۱)=(x^{۲}+x+۱)(x^{۳}+۱)$

هـ) $y^{۵}+y+۱=y^{۵}+y^{۴}-y^{۴}+y^{۳}-y^{۳}+y^{۲}-y^{۲}+y+۱$
$=y^{۵}+y^{۴}+y^{۳}-y^{۴}-y^{۳}-y^{۲}+y^{۲}+y+۱$
$=y^{۳}(y^{۲}+y+۱)-y^{۲}(y^{۲}+y+۱)+(y^{۲}+y+۱)=(y^{۲}+y+۱)(y^{۳}-y^{۲}+۱)$

و) $a(a+۱)(a+۲)(a+۳)+۱=a(a+۳)(a+۱)(a+۲)+۱$
$=(a^{۲}+۳a)(a^{۲}+۳a+۲)+۱$

حال اگر $A=a^{۲}+۳a$ قرار دهیم، داریم:

$$=A(A+۲)+۱=A^{۲}+۲A+۱=(A+۱)^{۲}=(a^{۲}+۳a+۱)^{۲}$$

.۱۲۷

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۰\Rightarrow\frac{bc+ac+ba}{abc}=۰\Rightarrow ab+ac+bc=۰$$

$$a+b+c=۱\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc=۱$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)=۱$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۱$$

.۱۲۸

$$a+b+c=۰\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)=۰\Rightarrow$$

$$۱+۲(ab+ac+bc)=۰\Rightarrow ab+ac+bc=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow(ab+ac+bc)^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲+۲a^۲bc+۲ab^۲c+۲abc^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲+۲abc(a+b+c)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow$$

$$a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲+۰=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$a^۲+b^۲+c^۲=۱\Rightarrow a^۴+b^۴+c^۴+۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)=۱$$

$$\Rightarrow a^۴+b^۴+c^۴+۲\times\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow a^۴+b^۴+c^۴=\frac{۱}{۲}$$

.۱۲۹

$$\frac{x^۲+۴}{x^۲-۴x+۳}+\frac{۳}{x^۲-x-۶}=\frac{x^۲+۴}{(x-۳)(x-۱)}+\frac{۳}{(x+۲)(x-۳)}$$

$$=\frac{(x^۲+۴)(x+۲)+۳(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x-۳)}=\frac{x^۳+۲x^۲+۴x+۸+۳x-۳}{(x-۱)(x+۲)(x-۳)}$$

$$=\frac{x^۳+۲x^۲+۷x+۵}{(x-۱)(x+۲)(x-۳)}$$

.۱۳۰

الف)

$$\left(\frac{x^۲-۳yx+۲y^۲}{x^۲-y^۲}+\frac{x^۲-۴yx+۳y^۲}{x-۳y}\right)\div\frac{y^۲-x^۲-x+۲y}{x+y}$$

ابتدا داخل پرانتز را ساده می‌کنیم.

$$\frac{(x-y)(x-۲y)}{(x-y)(x+y)}+\frac{(x-y)(x-۳y)}{x-۳y}=\frac{x-۲y}{x+y}+x-y=\frac{x-۲y+x^۲-y^۲}{x+y}$$

حال صورت سؤال را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x-2y+x^{2}-y^{2}}{x+y}\times\frac{x+y}{y^{2}-x^{2}-x+2y}=-1$$

ب)

ابتدا مخرج سه عبارت گویا را یکسان می‌کنیم و بعد حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}=\frac{(z-x)+(x-y)+(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$$

۱۳۱.

الف) $$\frac{19}{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{3^{2}}}=\frac{19}{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{3^{2}}}\times\frac{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{81}}=\frac{19(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{81})}{10+3^{2}}$$

$$=\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{81}$$

ب) $$\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}=\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}\times\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}-1}=\frac{3(\sqrt[3]{4}-1)}{4-1}=\sqrt[3]{4}-1$$

۱۳۲.

الف) در طول درس نشان دادیم که معادله‌ی $ax^{2}=0$, $a\neq 0$ دارای جواب $x=0$ است.

$$\sqrt{2}x^{2}=0\Rightarrow x=0$$

ب) $$-\frac{1}{5}x^{2}=0\Rightarrow x=0$$

پ) $$(\sqrt{3}-2)x^{2}=0\Rightarrow x=0$$

ث) $$2x^{2}+5x=0\Rightarrow x(2x+5)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } 2x+5=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-\frac{5}{2}$$

ت) $$-7x^{2}+3x=0\Rightarrow x(-7x+3)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } -7x+3=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{3}{7}$$

ج) $$x^{2}-49=0\Rightarrow x^{2}=49\Rightarrow |x|=7\Rightarrow x=\pm 7$$

د) $x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۲$ یا $x=-۱$

و) $x^{۲}+۳x+۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۲$ یا $x=-۱$

هـ) $(x+۱)^{۲}-۳(x+۱)=۰ \Rightarrow (x+۱)\left[(x+۱)-۳\right]=۰ \Rightarrow x+۱=۰$ یا $(x+۱)-۳=۰$

$\Rightarrow x=-۱$ یا $x=۲$

ی) $(۲x-۱)(x+۳)=-۳ \Rightarrow (۲x-۱)(x+۳)+۳=۰$

$\Rightarrow ۲x^{۲}+۶x-x-۳+۳=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}+۵x=۰ \Rightarrow x(۲x+۵)=۰$

$\Rightarrow x=۰$ یا $x=\frac{-۵}{۲}$

.۱۳۳

الف) $x^{۲}+(a+۱)x+a=۰$

$\Rightarrow x^{۲}+ax+x+a=۰$

$\Rightarrow x^{۲}+x+ax+a=۰ \Rightarrow x(x+۱)+a(x+۱)=۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x+a)=۰ \Rightarrow x+۱=۰$ **یا** $x+a=۰$

$\Rightarrow x=-۱$ **یا** $x=-a$

ب) $۲ax^{۲}+(۵b-۲a)x-۵b=۰$

$۲ax^{۲}+۵bx-۲ax-۵b=۰$

$x(۲ax+۵b)-(۲ax+۵b)=۰$

$\Rightarrow (۲ax+۵b)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۱$ **یا** $x=-\frac{۵b}{۲a}$

ج) $(x+۲)^{۲}-۲(x+۱)(x-۳)+(x-۳)^{۲}=۰$

$\Rightarrow x^{۲}+۴x+۴-۲(x^{۲}-۲x-۳)+(x^{۲}-۶x+۹)=۰$

$\Rightarrow x^{۲}+۴x+۴-۲x^{۲}+۴x+۶+x^{۲}-۶x+۹=۰$

$۲x+۱۹=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱۹}{۲}$

.۱۳۴

الف) $x^۲-۴x-۱=۰$

$$x^۲-۴x=۱\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۱+۴\Rightarrow (x-۲)^۲=۵$$

$$\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{۵}\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۵}\Rightarrow x_۱=\sqrt{۵}+۲\ ,\ \ x_۲=-\sqrt{۵}+۲$$

ب) $x^۲-۶x-۱۳=۰\Rightarrow x^۲-۶x=۱۳\Rightarrow x^۲-۶x+۹=۱۳+۹\Rightarrow (x-۳)^۲=۲۲\Rightarrow$

$$|x-۳|=\sqrt{۲۲}\Rightarrow x-۳=\pm\sqrt{۲۲}$$

$$x_۱=\sqrt{۲۲}+۳\ \ ,\ x_۲=-\sqrt{۲۲}+۳$$

ج) $\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+\frac{۱}{۲}=۰\xrightarrow{\times ۲}x^۲-۶x+۱=۰\Rightarrow x^۲-۶x=-۱$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹=-۱+۹\Rightarrow (x-۳)^۲=۸\Rightarrow |x-۳|=\sqrt{۸}$$

$$\Rightarrow x-۳=\pm ۲\sqrt{۲}\Rightarrow x_۱=۲\sqrt{۲}+۳\ ,\ x_۲=-۲\sqrt{۲}+۳$$

د) $۲x^۲+۷x+۱۱=۰\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}}x^۲+\frac{۷}{۲}x+\frac{۱۱}{۲}=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۷}{۲}x=-\frac{۱۱}{۲}$

$$x^۲+\frac{۷}{۲}x+(\frac{۷}{۴})^۲=-\frac{۱۱}{۲}+(\frac{۷}{۴})^۲\Rightarrow (x+\frac{۷}{۴})^۲=\frac{۲۷}{۴}=-\frac{۳۹}{۱۶}$$

معادله دارای جواب نیست.

.۱۳۵

الف) $a=۱\quad b=-۴\quad c=۲$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴(۱)(۲)}}{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x_۱=۲+\sqrt{۲}\ \ ,\ x_۲=۲-\sqrt{۲}$$

ب) $a=۲\qquad b=۱\qquad c=-۱$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۲)(-۱)}}{۴}=\frac{-۱\pm\sqrt{۹}}{۴}=\frac{-۱\pm ۳}{۴}$$

$$\Rightarrow x_۱ = -۱ \ , \ x_۲ = \frac{۱}{۲}$$

ج) $(۲x-۳)^۲ = ۱۱x - ۱۹ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۱۱x - ۱۹$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۳x + ۲۸ = ۰$$

$$a = ۴ \ , \ b = -۲۳ \ , \ c = ۲۸$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{۲۳ \pm \sqrt{(۲۳)^۲ - ۴(۴)(۲۸)}}{۸} = \frac{۲۳ \pm \sqrt{۸۱}}{۸} = \frac{۲۳ \pm ۹}{۸}$$

$$x_۱ = ۴ \ , \ x_۲ = \frac{۷}{۴}$$

د) $\frac{x^۲ - ۱}{۲} = ۱۱(x+۱) \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲۲(x+۱) \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲۲x + ۲۲$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲۲x - ۲۳ = ۰$$

$$a = ۱ \quad b = -۲۲ \quad c = -۲۳$$

$$x = \frac{۲۲ \pm \sqrt{(-۲۲)^۲ - ۴(۱)(-۲۳)}}{۲} = \frac{۲۲ \pm \sqrt{۵۷۶}}{۲} = \frac{۲۲ \pm ۲۴}{۲}$$

$$x_۱ = -۱ \ , \ x_۲ = ۲۳$$

۱۳۶.

الف) برای این که معادله درجه‌ی دو دارای دو ریشه متمایز باشد باید $\Delta > ۰$ شود.

$$a = a \ , \ b = ۳ \ , \ c = ۱۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۴(a)(۱۰) > ۰$$

$$\Rightarrow ۹ - ۴۰a > ۰ \Rightarrow ۹ > ۴۰a \Rightarrow a < \frac{۹}{۴۰}$$

ب) برای این که معادله درجه‌ی دو یک ریشه داشته باشد، باید $\Delta = ۰$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۴۰a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۹}{۴۰}$$

ج) برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، باید $\Delta < ۰$

$$\Delta = ۹ - ۴۰a < ۰ \Rightarrow ۹ < ۴۰a \Rightarrow a > \frac{۹}{۴۰}$$

.۱۳۷

اگر x و y را به‌ترتیب برابر با سن علی و سن پدر علی بگیریم، داریم:

$$y = ۸x \ , \ (y+۱) = (x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow (۸x+۱) = (x+۱)^۲ \Rightarrow ۸x+۱ = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۶x = ۰$$

$$x = ۰ \ , \ x = ۶$$

$x = ۰$ غیر قابل قبول است. بنابراین علی ۷ سال سن دارد و پدر او $۴۲ = ۷ \times ۸$ سال سن دارد. یعنی پدر علی ۴۲ ساله است.

.۱۳۸

می‌دانیم حاصل جمع ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو $ax^۲ + bx + c = ۰$ در صورت وجود برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

الف) $b = -۱۱ \quad , \ a = ۱۰$

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{-۱۱}{۱۰} = \frac{۱۱}{۱۰}$$

ب) $x + ۷ = (۲x-۱)(۳x-۲) \Rightarrow x + ۷ = ۶x^۲ - ۴x - ۳x + ۲$

$$\Rightarrow x + ۷ = ۶x^۲ - ۷x + ۲ \Rightarrow ۶x^۲ - ۸x - ۵ = ۰$$

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{-۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

ج) $x^۲ = \sqrt{۲}(۳x - \sqrt{۲}x) \Rightarrow x^۲ = ۳\sqrt{۲}x - ۲x \Rightarrow x^۲ = (۳\sqrt{۲} - ۲)x$

$$\Rightarrow x^۲ - (۳\sqrt{۲} - ۲)x = ۰$$

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۳\sqrt{۲} - ۲}{۱} = ۳\sqrt{۲} - ۲$$

.۱۳۹

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{۷k}{۵k+۲} = ۳ \Rightarrow -۷k = ۱۵k + ۶ \Rightarrow -۲۲k = ۶ \Rightarrow k = -\frac{۳}{۱۱}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-۸k}{۵k+۲}=\frac{-۸\times(-\frac{۳}{۱۱})}{۵(-\frac{۳}{۱۱})+۲}=\frac{۲۴}{۷}$$

.۱۴۰

$$(x+۶)^۲+(۲x+۱)^۲=۶۹۷$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۲x+۳۶+۴x^۲+۴x+۱=۶۹۷$$

$$\Rightarrow ۵x^۲+۱۶x+۳۷=۶۹۷\Rightarrow ۵x^۲+۱۶x-۶۶۰=۰$$

ریشه‌های این معادله را با استفاده از فرمول به دست می‌آوریم.

$$a=۵\ ,\ b=۱۶\ ,\ c=-۶۶۰$$

$$x=\frac{-۱۶\pm\sqrt{(۱۶)^۲-۴(۵)(-۶۶۰)}}{۱۰}=\frac{-۱۶\pm\sqrt{۱۳۴۵۶}}{۱۰}=\frac{-۱۶\pm۱۱۶}{۱۰}$$

$x_1=-\frac{۱۳۲}{۱۰}$ **و غیرقابل قبول است** $x_2=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰$

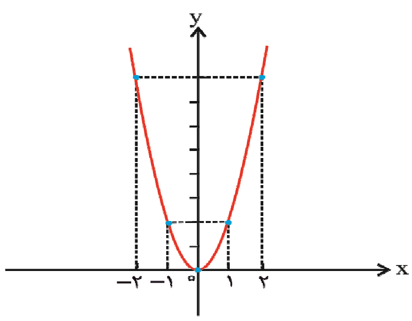
در نتیجه ضلع یکی از مربع‌ها ۱۶ و ضلع مربع دیگر ۲۱ است.

بنابراین مساحت مربع‌ها ۲۵۶ و ۴۴۱ است.

.۱۴۱

الف) $y=۲x^۲$

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
y	$+\infty$	۸	۲	۰	۲	۸	$+\infty$



ب) $y=-x^{۲}+x+۱$

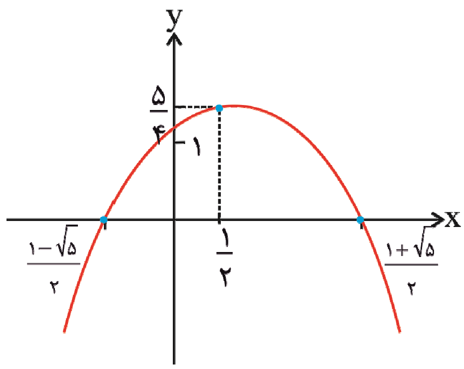
$a=-۱<۰$ ، سهمی دارای بیشترین مقدار است و دهانه آن روبه پایین است.

$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)(۱)-(۱)^{۲}}{۴(-۱)}=\frac{-۴-۱}{-۴}=\frac{۵}{۴}$$

$V:(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۴})$ مختصات رأس سهمی

$x=۰ \Rightarrow y=۱ \quad (۰,۱)$ نقطه برخورد با محور y



$y=۰ \Rightarrow -x^{۲}+x+۱=۰$

$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱-۴(-۱)(۱)=۱+۴=۵$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{-۲}\Rightarrow x_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, x_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

$(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, ۰),(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}, ۰)$ نقطه‌های برخورد با محور x

ج) $y=۳(x+۱)(x-۴)$

$y=۳(x^۲-۳x-۴)=۳x^۲-۹x-۱۲$ ‏$a=۳>۰$، دهانه سهمی به سمت بالا است.

$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۹}{۲(۳)}=\frac{۳}{۲}$$

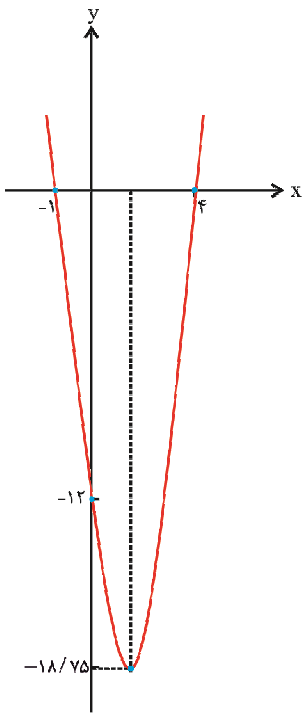
$$k=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(۳)(-۱۲)-(-۹)^۲}{۴(۳)}=-\frac{۲۲۵}{۱۲}=-۱۸/۷۵$$

$V:(\frac{۳}{۲}, -\frac{۲۲۵}{۱۲})$ رأس سهمی

$x=۰ \Rightarrow y=-۱۲$ ‏ $(۰, -۱۲)$ ‏ نقطه برخورد با محور y

$y=۰ \Rightarrow ۳(x+۱)(x-۴) \Rightarrow x=-۱, x=۴$

$(-۱,۰), (۴,۰)$ ‏ نقاط برخورد با محور x



د) $y=-(x+۳)^{۲}-۵$

$$y=-(x^{۲}+۶x+۹)-۵=-x^{۲}-۶x-۹-۵=-x^{۲}-۶x-۱۴$$

$a=-۱<۰$، دهانه سهمی به سمت پایین است.

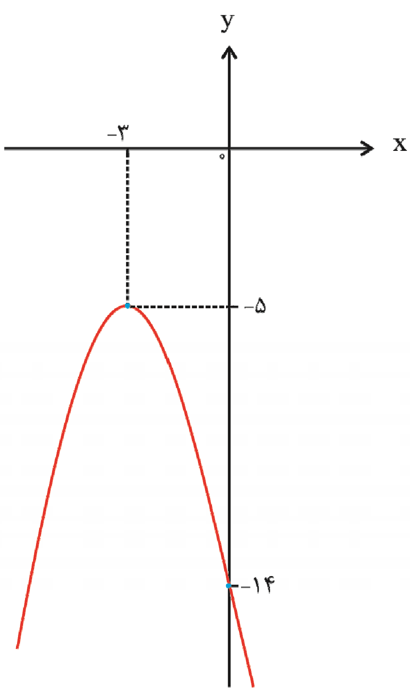
$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۶}{۲(-۱)}=-۳$$

$$K=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)(-۱۴)-(-۶)^{۲}}{۴(-۱)}=\frac{۲۰}{-۴}=-۵$$

مختصات رأس سهمی $(-۳\ ,\ -۵)$

نقطه برخورد با محور y $(۰\ ,-۱۴)$ $x=۰ \Rightarrow y=-۱۴$

نمودار با محور x برخورد نمی‌کند. $y=۰ \Rightarrow \Delta=-۲۰<۰$



با استفاده از روش‌های انتقال سهمی نیز می‌توان نمودار را رسم کرد.

و) $y=-2(x+4)^2$

$$y=-2(x^2+8x+16)=-2x^2-16x-32$$

$a=-2<0$، دهانه سهمی به سمت پایین است.

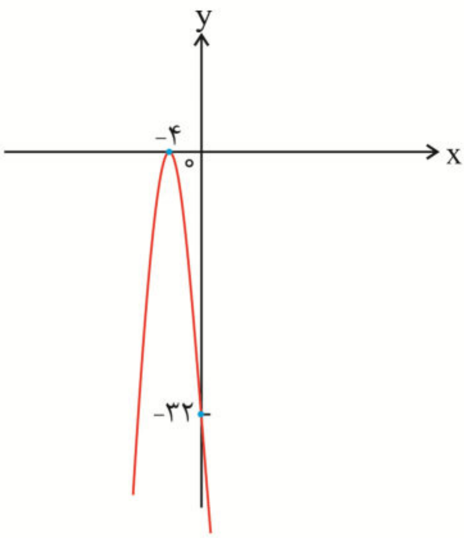
$$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-16}{2(-2)}=-4$$

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-2)(-32)-(-16)^2}{4(-2)}=\frac{256-256}{-8}=0$$

$V:(-4,0)$ مختصات رأس سهمی

$x=0 \Rightarrow y=-32$ نقطه برخورد محور y $(0,-32)$

$y=0 \Rightarrow -2(x+4)^2=0 \Rightarrow x=-4$ نقطه مماس بر محور x $(-4\ ,\ 0)$



.۱۴۲

$4x-3=0$ خط تقارن سهمی $y=2x^2+(m+1)x-4$ است.

$4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$ خط تقارن

$$h=\frac{3}{4}=\frac{-(m+1)}{4} \Rightarrow m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \Rightarrow b=-3$$

$a=2>0$ است، بنابراین سهمی دارای کمترین مقدار است (مقدار y در مختصات رأس سهمی).

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(2)(-4)-(-3)^2}{4(2)}=\frac{-32-9}{8}=-\frac{41}{8}$$

.۱۴۳

رأس سهمی روی محور y قرار دارد. یعنی معادله محور تقارن آن $x=۰$ است.

$$h=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲(۲k+۵)}{-۶}=۰\Rightarrow ۲(۲k+۵)=۰\Rightarrow k=-\frac{۵}{۲}$$

.۱۴۴

سهمی از نقطه $(۲,۹)$ می‌گذرد، یعنی این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$y=mx^{۲}-(m+۱)x+۲m-۱$$

$$۹=m(۴)-(m+۱)\times ۲+۲m-۱\Rightarrow ۹=۴m-۲m-۲+۲m-۱\Rightarrow m=۳$$

.۱۴۵

الف) سه نقطه $(۰,۰)$، $(۶,۱)$ و $(۵,۰)$ از این سهمی را داریم.

می‌توانیم از فرمول $y=ax^{۲}+bx+c$ استفاده کنیم.

$$(۰,۰):۰=c$$

$$\begin{array}{ll}(۶,۱):۶=a+b+c\Rightarrow a+b=۶ & (۱)\\ (۵,۰):۰=۲۵a+۵b+c\Rightarrow ۵a+b=۰ & (۲)\end{array}\Rightarrow a=\frac{-۳}{۲},\ b=\frac{۱۵}{۲}$$

بنابراین معادله سهمی به‌صورت $y=-\frac{۳}{۲}x^{۲}+\frac{۱۵}{۲}x$ است.

ب) همان‌طورکه در شکل مشاهده می‌کنید $(۳,۰)$ و $(-۳,۰)$ ریشه‌های سهمی هستند. می‌توانیم از فرمول $y=a(x-x_{۱})(x-x_{۲})$ استفاده کنیم. داریم:

$$y=a(x-۳)(x+۳)$$

نقطه $(۰,۳)$ روی سهمی قرار دارد. یعنی در معادله بالا صدق می‌کند. داریم:

$$۳=-۹a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین معادله سهمی به‌صورت $y=-\frac{۱}{۳}(x-۳)(x+۳)$ است.

ج) با توجه به شکل، مختصات رأس سهمی $(-۳,۰)$ است و سهمی از نقطه $(۰,۳)$ می‌گذرد. می‌توانیم از فرمول $y=a(x-h)^{۲}+k$ استفاده کنیم.

$$y=a(x+۳)^{۲}$$

با قرار دادن $(۰,۳)$ در معادله سهمی داریم:

$$۳=۹a\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $y=\frac{۱}{۳}(x+۳)^{۲}$ معادله سهمی است.

.۱۴۶

الف) برای رسم نمودار معادله $y=|x^{2}-3x+2|$، ابتدا نمودار مربوط به معادله $y=x^{2}-3x+2$ را رسم می‌کنیم.

سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور xها است (منفی است) را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

$a=1>0$ در نتیجه دهانه نمودار رو به بالا است.

$$h=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{2(1)}=\frac{3}{2}$$

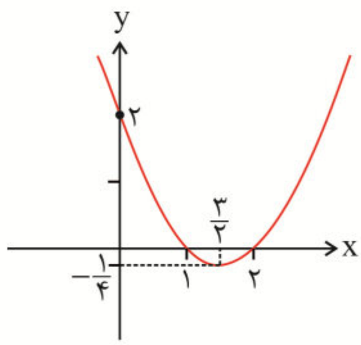
$$k=\frac{4ac-b^{2}}{4a}=\frac{4(1)(2)-(-3)^{2}}{4(1)}=-\frac{1}{4}$$

$V:(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$ رأس سهمی

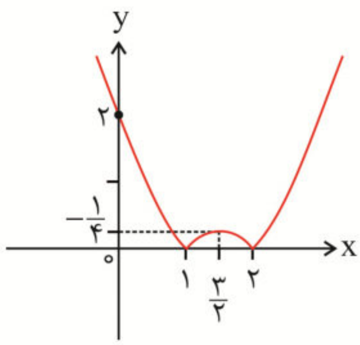
$x=0 \Rightarrow y=2 \qquad (0\,,2)$ نقطه برخورد با محور y

$$y=0 \Rightarrow x^{2}-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=1$$

$(2,0)\ ,\ (1\,,\,0)$ نقطه‌های برخورد با محور x



حال مقدار منفی نمودار (قسمت زیر محور x) را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.



ب) $y=-x^{۲}+۲|x|+۳$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) $x\geq ۰$

$$x\geq ۰\ ,\ |x|=x \Rightarrow y=-x^{۲}+۲x+۳$$

$a=-۱<۰$، دهانه سهمی به سمت پایین است.

$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(-۱)}=۱$$

$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)(۳)-(۲)^{۲}}{۴(-۱)}=۴$$

$V:(۱\ ,۴)$ مختصات رأس سهمی

$x=۰ \Rightarrow y=۳$ $(۰,۳)$ نقطه برخورد با محور y

$$y=۰ \Rightarrow -x^{۲}+۲x+۳=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۱$$

$(۳,۰\ ),(-۱\ ,۰)$ نقطه‌های برخورد با محور x

۲) $x<۰$

$$x<۰ \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow y=-x^{۲}-۲x+۳$$

$a=-۱<۰$، دهانه سهمی به سمت پایین است.

$$h=-\frac{-۲}{۲\ (-۱)}=-۱$$

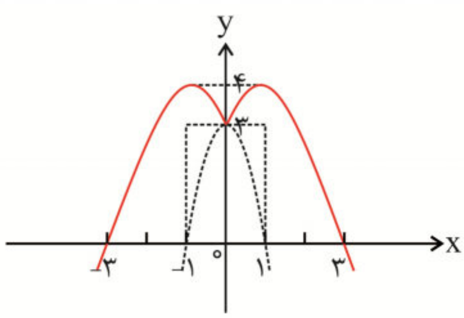
$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)\ (۳)-(-۲)^{۲}}{۴(-۱)}=۴$$

$V:(-۱,۴)$ مختصات رأس سهمی

$x=۰ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow (۰\ ,۳)$ نقطه برخورد با محور y

$$y=۰ \Rightarrow -x^{۲}-۲x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۱$$

$(-۳,۰)\ ,\ (۱\ ,\ ۰)$ نقطه‌های برخورد با محور x



ج) $y=x|x+۲|$

برای رسم این نمودار دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $x+۲\geq ۰$

$$x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲\ ,\ |x+۲|=x+۲\ :\quad y=x^{۲}+۲x$$

$a=۱>۰$، دهانه سهمی به سمت بالا است.

$$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(۱)}=-۱$$

$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(۱)(۰)-(۲)^{۲}}{۴(۱)}=-۱$$

مختصات رأس سهمی $V:(-۱,-۱)$

نقطه برخورد با محور y $\quad x=۰\Rightarrow y=۰\quad (۰\,,۰)$

$$y=۰\Rightarrow x^{۲}+۲x=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=۰$$

نقطه‌های برخورد با محور x $\quad (-۲,۰)(۰,۰)$

۲) $x+۲<۰$

$$x+۲<۰\Rightarrow x<-۲\Rightarrow |x+۲|=-(x+۲)$$

$$y=-x^{۲}-۲x$$

$a=-۱<۰$ دهانه سهمی به سمت پایین است.

$$h=\frac{۲}{۲(-۱)}=-۱$$

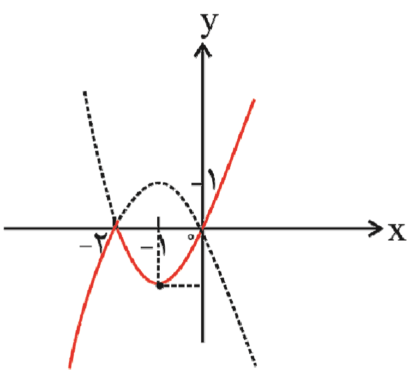
$$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)(۰)-(-۲)^{۲}}{۴(-۱)}=۱$$

مختصات رأس سهمی $V:(-۱,۱)$

نقطه‌های برخورد با محور y $\quad x=۰\Rightarrow y=۰\quad (۰\,,۰)$

$$y=۰\Rightarrow -x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=۰$$

نقطه‌های برخورد با محور x $\quad (-۲,۰)\ ,(۰,۰)$



۱۴۷. می‌دانیم برای به‌دست آوردن مساحت مستطیل باید طول و عرض آن را داشته باشیم. در این سهمی اگر مختصات رأس و نقطه برخورد با محور **x** و **y** را داشته باشیم، می‌توانیم طول و عرض مستطیل را به‌دست آوریم:

$y=x^{۲}-۶x+۵$

$h=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۶}{۲}=۳$

$k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(۱)(۵)-(-۶)^{۲}}{۴(۱)}=\frac{۲۰-۳۶}{۴}=-۴$

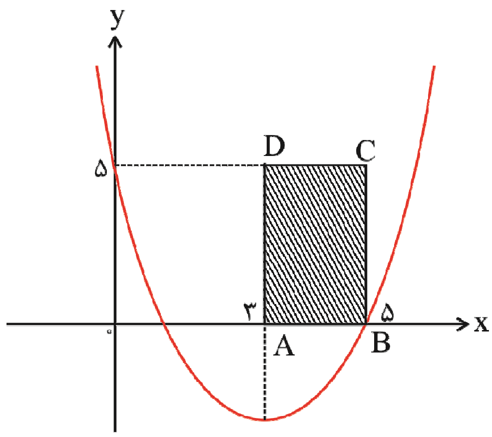
$V:(۳,-۴)$ مختصات رأس سهمی

$x=۰\Rightarrow y=۵ \quad (۰,۵)$ نقطه برخورد با محور y

$y=۰\Rightarrow x^{۲}-۶x+۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۵ \ , \ x=۱$

$(۵,۰) \ , \ (۱,۰)$ نقطه‌های برخورد با محور x

داریم:



$AB=۲ \ , \ DC=۵ \Rightarrow S_{ABCD}=۲\times۵=۱۰$

۱۴۸.

$(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ مختصات راس سهمی

$\frac{-b}{۲a}=۰\Rightarrow b=۰$

$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=۳۰\Rightarrow c=۳۰$

$y=ax^{۲}+۳۰\Rightarrow ۰=۲۵۰۰a+۳۰\Rightarrow a=-\frac{۲۵۰۰}{۳۰}=-\frac{۲۵۰}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۲۵۰}{۳}x^{۲}+۳۰$

.۱۴۹

الف) $۳x-۲=۰ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$

x	$x<\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$x>\frac{۲}{۳}$
$۳x-۲$	$-$	۰	$+$

$x \geq \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x-۲ \geq ۰$

$x < \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x-۲ < ۰$

ب) $x^{۲}-۵x+۴=(x-۴)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۴\ ,\ x=۱$

x	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
$x^{۲}-۵x+۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

ج) $۱۲x^{۲}+۴\sqrt{۳}x+۱=۰$

$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۴\sqrt{۳})^{۲}-۴(۱۲)(۱)=۴۸-۴۸=۰$

$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴\sqrt{۳}}{۲\times۱۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$		$+\infty$
$۱۲x^{۲}+۴\sqrt{۳}x+۱$		$+$	۰	$+$	

د) $-۴x^{۲}+۱۰x-۲۵=۰$

$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۱۰)^{۲}-۴(-۴)(-۲۵)=۱۰۰-۴۰۰=-۳۰۰<۰$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-۴x^{۲}+۱۰x-۲۵$		$-$	

۱۵۰.

الف) $x^{۲} < ۹x - ۲۰ \Rightarrow x^{۲} - ۹x + ۲۰ < ۰$

$x^{۲} - ۹x + ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \;,\; x = ۵$

x	$-\infty$		۴		۵		$+\infty$
$x^{۲} - ۹x + ۲۰$		+		−		+	

مجموعه جواب : $۴ < x < ۵$ یا $x \in (۴,۵)$

ب) $۴x - ۷x^{۲} > ۰$

$۴x - ۷x^{۲} = ۰ \Rightarrow x(۴-۷x) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $۴ - ۷x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \;,\; x = \frac{۴}{۷}$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۷}$		$+\infty$
$۴x - ۷x^{۲}$		−		+		−	

مجموعه جواب : $۰ < x < \frac{۴}{۷}$ یا $x \in (۰,\frac{۴}{۷})$

ج) $(۲x-۱)^{۲} > (x-۵)^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲} - ۴x + ۱ > x^{۲} - ۱۰x + ۲۵$

$\Rightarrow ۳x^{۲} + ۶x - ۲۴ > ۰$

$۳x^{۲} + ۶x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۴ \;,\; x = ۲$

x	$-\infty$		-۴		۲		$+\infty$
$۳x^{۲} + ۶x - ۲۴$		+		−		+	

مجموعه جواب : $x < -۴$ یا $x > ۲$ یا $x \in (-\infty,-۴) \cup (۲,+\infty)$

۱۵۱.

الف) برای این‌که معادله ریشه حقیقی نداشته باشد، باید $\Delta < ۰$ شود.

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = \left(۲(۱-k)\right)^۲ - ۴(۱)(۱) = ۴ + ۴k^۲ - ۸k - ۴ = ۴k^۲ - ۸k$$

$$\Delta < ۰ \Rightarrow ۴k^۲ - ۸k < ۰$$

$$۴k^۲ - ۸k = ۰ \Rightarrow ۴k(k-۲) = ۰ \Rightarrow k = ۰\ ,\ k = ۲$$

k	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$۴k^۲ - ۸k$		+	۰	−	۰	+	

در نتیجه $۰ < k < ۲$.

ب) برای این که معادله ریشه مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = ۰$ شود.

$$\Delta = ۴k^۲ - ۸k = ۰ \Rightarrow k = ۰\ ,\ k = ۲$$

ج) برای این‌که معادله ریشه مجزا داشته باشد، باید $\Delta > ۰$ شود.

$$\Delta = ۴k^۲ - ۸k > ۰$$

k	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$۴k^۲ - ۸k$		+	۰	−	۰	+	

$$k \in (-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$$

۱۵۲.

الف) $x(x-۱)^۲ \geq ۰$

$x = ۰$

$(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

دقت کنیم که $(x-۱)^۲$ همواره مقداری بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، بنابراین آن را تعیین علامت نمی‌کنیم.

چون $x(x-۱)^۲ \geq ۰$ است، بنابراین $x = ۱$ جزء مجموعه جواب می‌شود.

x		۰	
$x(x-۱)^۲$	−	۰	+

مجموعه جواب : $x \geq ۰$ یا $x \in [۰, +\infty)$

ب) $(۲-x)(۳x+۱)(۲x-۳)>۰$

$(۲-x)(۳x+۱)(۲x-۳)=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=-\frac{۱}{۳}\ ,\ x=\frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$	$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۳}{۲}$		۲		$+\infty$
$۲-x$	+		+		+	۰	−	
$۳x+۱$	−	۰	+		+		+	
$۲x-۳$	−		−	۰	+		+	
$(۲-x)(۳x+۱)(۲x-۳)$	+	۰	−	۰	+	۰	−	

مجموعه جواب : $x\in(-\infty,-\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۳}{۲},۲)$

ج) $(۳x-۲)(x-۳)^{۲}(x+۱)^{۲}(x+۲)^{۴}<۰$

عبارت‌های $(x-۳)^{۲}$، $(x+۱)^{۲}$، $(x+۲)^{۴}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، بنابراین فقط باید ریشه‌های آن‌ها را از مجموعه جواب خارج کنیم.

x	$-\infty$	-۲		-۱		$\frac{۲}{۳}$		۳		$+\infty$
$۳x-۲$	−		−		−	۰	+		+	
$(۳x-۲)(x-۳)^{۲}(x+۱)^{۲}(x+۲)^{۴}$	−	۰	−	۰	−	۰	+	۰	+	

مجموعه جواب : $(-\infty-۲)\cup(-۲,-۱)\cup(-۱,\frac{۲}{۳})$

د) $\frac{(x-۱)(۳x-۲)}{۵-۲x} \geq ۰$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$۳x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$

$۵-۲x=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$

$x=\frac{۵}{۲}$ جزء مجموعه جواب نیست، زیرا مخرج را صفر می‌کند.

x	$-\infty$	$\frac{۲}{۳}$		۱		$\frac{۵}{۲}$	$+\infty$
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$۳x-۲$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$۵-۲x$	$+$		$+$		$+$	۰	$-$
$\frac{(x-۱)(۳x-۲)}{۵-۲x}$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	تعریف نشده	$-$

مجموعه جواب : $(-\infty,\frac{۲}{۳}] \cup [۱,\frac{۵}{۲})$

و) $\left|\frac{x+۲}{۲x-۳}\right|<۳$

$\Rightarrow -۳<\frac{x+۲}{۲x-۳}<۳$

در نتیجه داریم:

$(۱)\ -۳<\frac{x+۲}{۲x-۳}$ و $(۲)\ \frac{x+۲}{۲x-۳}<۳$

مجموعه جواب نامعادلات (۱) و (۲) را به‌دست می‌آوریم و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم. (چرا؟)

$\frac{x+۲}{۲x-۳}>-۳ \Rightarrow \frac{x+۲}{۲x-۳}+۳>۰ \Rightarrow \frac{x+۲+۶x-۹}{۲x-۳}>۰$

$\Rightarrow \frac{۷x-۷}{۲x-۳}>۰$

$۷x-۷=۰ \Rightarrow x=۱$

$۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$ مخرج کسر را صفر می‌کند.

x	$-\infty$	۱		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$7x-7$	$-$	۰	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{7x-7}{2x-3}$	$+$	۰	$-$	تعریف نشده	$+$

مجموعه جواب (۱) : $(-\infty,1)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

$$\frac{x+2}{2x-3}<3 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-3}-3<0 \Rightarrow \frac{x+2-6x+9}{2x-3}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-5x+11}{2x-3}<0$$

$$-5x+11=0 \Rightarrow x=\frac{11}{5}$$

$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ مخرج کسر را صفر می‌کند.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{5}$	$+\infty$
$-5x+11$	$+$		$+$	۰	$-$
$2x-3$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{-5x+11}{2x-3}$	$-$	تعریف نشده	$+$	۰	$-$

مجموعه جواب (۲) $(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{11}{5},+\infty)$

حال بین دو مجموعه جواب به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مجموعه جواب : $(-\infty,1)\cup(\frac{11}{5},+\infty)$

.۱۵۳

$$\sqrt[۳]{۲^{\frac{۳x-۱}{x-۱}}}<۸^{\frac{x-۳}{۳x-۷}} \quad \Rightarrow$$

$$۲^{\frac{۳x-۱}{۳(x-۱)}}<۲^{\frac{۳(x-۳)}{۳x-۷}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{۳x-۱}{۳(x-۱)}<\frac{۳(x-۳)}{۳x-۷} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{۳x-۱}{۳x-۳}-\frac{۳x-۹}{۳x-۷}<۰ \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(۳x-۱)(۳x-۷)-(۳x-۹)(۳x-۳)}{(۳x-۳)(۳x-۷)}<۰$$

$$\frac{۱۲x-۲۰}{(۳x-۳)(۳x-۷)}<۰$$

$$۱۲x-۲۰=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

$$۳x-۳=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$۳x-۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۷}{۳}$$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۵}{۳}$		$\frac{۷}{۳}$		$+\infty$
$۱۲x-۲۰$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$(۳x-۳)(۳x-۷)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{۱۲x-۲۰}{(۳x-۳)(۳x-۷)}$		$-$	تعریف نشده	$+$	۰	$-$	تعریف نشده	$+$	

$$x\in(-\infty,-۱)\cup(\frac{۵}{۳},\frac{۷}{۳})$$

.۱۵۴

حالت اول : $\begin{cases} x^{۲}-۳x+۲\geq ۰ & (۱) \\ x^{۲}-۳x+۲\leq ۲x-x^{۲} & (۲) \end{cases}$

$$x^{۲}-۳x+۲\geq ۰ \qquad (۱)$$

$$x^{۲}-۳x+۲=۰ \Rightarrow x=۱\,,\ x=۲$$

$$x^{۲}-۳x+۲\leq ۲x-x^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}-۵x+۲\leq ۰ \qquad (۲)$$

$$۲x^{۲}-۵x+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\,,\ x=۲$$

حالت دوم $\begin{cases} x^{۲}-۳x+۲<۰ & (۱) \\ -(x^{۲}-۳x+۲)\leq ۲x-x^{۲} & (۲) \end{cases}$

$x^{۲}-۳x+۲<۰ \qquad (۱)$

$x^{۲}-۳x+۲=۰ \Rightarrow x=۱ \;,\; x=۲$

$-(x^{۲}-۳x+۲)\leq ۲x-x^{۲} \qquad (۲)$

$-x^{۲}+۳x-۲\leq ۲x-x^{۲}$

$x-۲\leq ۰$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

x	$-\infty$ تا $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ تا ۱	۱ تا ۲	۲ تا $+\infty$
(۱)	+	+	−	+
(۲)	+	−	−	+
دستگاه نامعادلات				
(۱)	+	+	−	+
(۲)	−	−	−	+
دستگاه نامعادلات				

$\in[\frac{۱}{۲},۱]\cup(۱,۲)\cup\{۲\}\Rightarrow$

$\in[\frac{۱}{۲},۲]$

.۱۵۵

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را برابر گوییم، هرگاه $a=c$ و $b=d$ باشد.

$(۲a-۳b \;,۴a-۱)=(۵,۲)$

$\Rightarrow\begin{cases} ۲a-۳b=۵ \\ ۴a-۱=۲ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}\,,b=-\frac{۷}{۶}$

.۱۵۶

$(۲m-۱,۴)=(۵,m+۱)$

$m+۱=۴\Rightarrow m=۳$

.۱۵۷

گزینه‌ی (الف) تابع است.

گزینه‌ی(ب) تابع است.

گزینه‌ی (ج) تابع نیست . روش اول: برای نقطه ی $x=۱$ دو مقدار ۱ و ۱- وجود دارد.

$$((۱,-۱)\ ,\ (۱,۱))$$

روش دوم: خط $x=۱$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی(د) تابع نیست.

خط $x=۱$ و $x=۲$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

.۱۵۸

برای این‌که این رابطه تابع باشد، باید زوج مرتب‌های $(-۴,۳)$ و $(-۴,a^۲-۱)$ برابر باشند. بنابراین:

$a^۲-۱=۳ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$

اگر $a=۲ \Rightarrow (a-۶,۳),(-۴,۳) \Rightarrow b\in\mathbb{R}$ (b هر عدد حقیقی می‌تواند باشد)

اگر $a=-۲ \Rightarrow (a-۶,۳)=(-۸,۳) \Rightarrow (-۸,۳)=(-۸,b) \Rightarrow b=۳$

.۱۵۹

الف) اگر مستطیل را مؤلفه‌ی اول ، محیط آن را مؤلفه‌ی دوم در نظر بگیریم، رابطه‌ی به وجود آمده تابع است ولی اگر محیط را مؤلفه‌ی اول و مستطیل را مؤلفه‌ی دوم در نظر بگیریم، رابطه تابع نیست، زیرا ممکن است مستطیل‌های متفاوت، محیط‌های یکسانی داشته باشند.

ب) گزینه‌ی تابع نیست. زیرا برای عدد ۳ دو مقدار متفاوت وجود دارد.

.۱۶۰

$$\{(۱,۱)\ ,\ (۲,۲),(۱,۲)\ ,(۲,۱)\}$$

رابطه‌ی مورد نظر تابع نیست.

.۱۶۱

الف) این رابطه تابع است، زیرا برای هر شخص تنها یک اثر انگشت وجود دارد.

ب) این رابطه تابع است ، زیرا توان سوم هیچ دوعددی یکسان نیست.

ج) این رابطه تابع است، زیرا یک کشور تعداد همسایگان مشخصی دارد.

د) تابع نیست، زیرا درون یک صندوق‌پستی همیشه تعداد نامه‌های یکسان قرار ندارند.