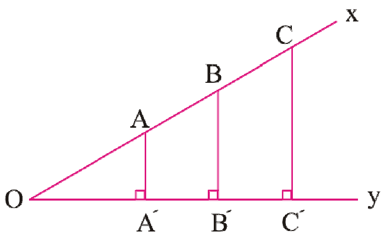
# مثلثات

## آموزش مفهومی

به بخشی از ریاضیات که به بررسی روابط بین اضلاع و زوایا در یک مثلث می‌پردازد، مثلثات می‌گوییم. یکی از اهداف این بخش یافتن روابطی است که بتوان فاصله‌ها را به صورت غیرمستقیم محاسبه کرد.

## نسبت‌های مثلثاتی

زاویه $x\hat{O}y$ را در شکل زیر در نظر بگیرید. نقاط $A$ و $B$ و $C$ را روی $Ox$ در نظر گرفته و از آن نقاط عمودهایی بر $Oy$ چنان رسم می‌کنیم که ضلع $Oy$ را در نقاط $A'$، $B'$ و $C'$ قطع کنند.




با توجه به این‌که سه مثلث به وجود آمده با هم متشابه‌اند، (هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند) خواهیم داشت:

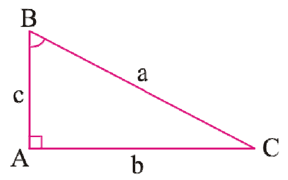
$$O\overset{\triangle}{A}A' \sim O\overset{\triangle}{B}B' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'}=\frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB}$$

$$O\overset{\triangle}{A}A' \sim O\overset{\triangle}{C}C' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'}=\frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{AA'}{OA}=\frac{CC'}{OC}$$

با توجه به رابطه‌های فوق ملاحظه می‌کنید $\frac{AA'}{OA}$، $\frac{BB'}{OB}$ و $\frac{CC'}{OC}$ با هم برابرند و فقط به زاویه $O$ بستگی دارند، نه طول اضلاع آن.

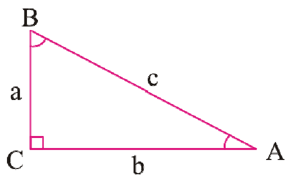
**قرارداد:** در مثلث قائم‌الزاویه $ABC$ اگر $\hat{A}=90^\circ$ باشد، ضلع $AC$ را «ضلع مقابل زاویه‌ی $B$» و ضلع $AB$ را «ضلع مجاور زاویه‌ی $B$» می‌نامیم.

همان‌طور که می‌دانیم در مثلث هر ضلع را با حرف کوچک زاویه مقابل آن نام‌گذاری می‌کنند.




## سینوس یک زاویه

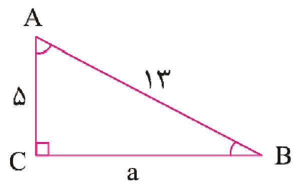
**تعریف:** در مثلث قائم‌الزاویه $ABC\ (C = ۹۰^\circ)$، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A به وتر را «سینوس زاویه‌ی A» می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. بنابراین:




$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه‌ی A}}{\text{طول وتر}} = \frac{a}{c}$$

**تذکر:** با توجه به تعریف فوق برای زاویه حاده A همواره داریم: $۰ < \sin A < ۱$

**مثال:** با توجه به شکل زیر، می‌خواهیم سینوس زاویه A و سینوس زاویه B را بیابیم.




به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$a^۲ + ۵^۲ = ۱۳^۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow a = ۱۲$$

حال به کمک تعریف داریم:

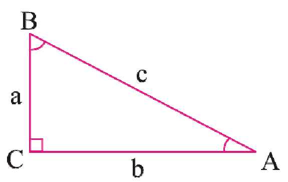
$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل A}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin B = \frac{\text{طول ضلع مقابل B}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c} = \frac{۵}{۱۳}$$

**تذکر:** همان‌طور که دیدیم اندازه سینوس یک زاویه به اضلاع آن زاویه بستگی ندارد فقط به اندازه‌ی آن زاویه بستگی دارد. (طبق رابطه تشابه مثلث‌ها)

## کسینوس یک زاویه

تعریف: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه قائمه C، نسبت طول ضلع مجاور زاویه‌ی A به وتر مثلث را «کسینوس زاویه A» می‌نامیم و آن را با نماد cos A نشان می‌دهیم. بنابراین:

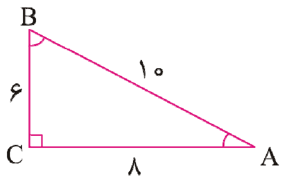



$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه‌ی A}}{\text{طول وتر}} = \frac{b}{c}$$

**نکته:** با توجه به تعریف فوق برای زاویه حاده A همواره داریم $۰ < \cos A < ۱$.

**تذکر:** مانند قبل با توجه به تشابه مثلث‌ها کسینوس یک زاویه نیز به اضلاع زاویه بستگی ندارد فقط به اندازه‌ی آن زاویه بستگی دارد.

**مثال:** با توجه به شکل زیر، می‌خواهیم کسینوس زاویه A و کسینوس زاویه B را بیابیم.

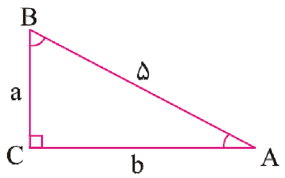



به کمک تعریف داریم:

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه‌ی A}}{\text{وتر}} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos B = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه‌ی B}}{\text{وتر}} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$$

**مثال:** اگر در شکل زیر $\cos A = ۰/۸$ باشد، طول اضلاع مثلث، $\sin A$ و $\cos B$ را بیابید.




پاسخ:

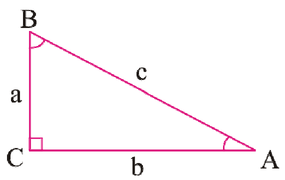
$$\cos A = \frac{b}{۵} = ۰/۸ \Rightarrow b = ۴$$

$$a^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

$$\cos B = \frac{۳}{۵} = ۰/۶, \sin A = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

## تانژانت یک زاویه

تعریف: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با زاویه قائمه C، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A به طـول ضـلع مجـاور زاویـه‌ی A را «تانژانـت زاویه‌ی A» می‌نامیم و آن را با $\tan A$ یا $tgA$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

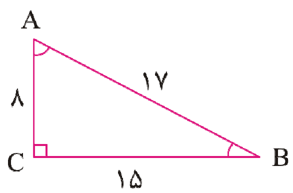



$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه A}} = \frac{a}{b}$$

با توجه به تعریف فوق برای زاویه حاده A همواره $\tan A > ۰$ خواهد بود.

**مثال:** با توجه به شکل زیر، می‌خواهیم تانژانت زاویه A و تانژانت زاویه B را بیابیم.

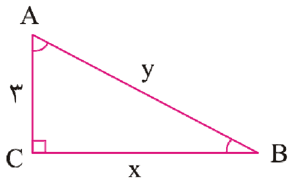
به کمک تعریف داریم:




$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه A}} = \frac{۱۵}{۸}$$

$$\tan B = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } B}{\text{طول ضلع مجاور زاویه } B} = \frac{۸}{۱۵}$$

**مثال:** اگر $\tan A = ۲$ باشد، طول اضلاع خواسته شده مثلث زیر را بیابید.




پاسخ:

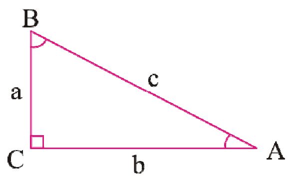
$$\tan A = ۲ \Rightarrow \frac{x}{۳} = ۲ \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ = ۳۶ + ۹ = ۴۵ \Rightarrow y = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

**تذکر:** با توجه به تشابه مثلث‌ها، اندازه‌ی تانژانت یک زاویه نیز به اضلاع آن زاویه بستگی ندارد، فقط به اندازه‌ی آن زاویه بستگی دارد.

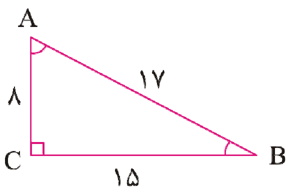
### کتانژانت یک زاویه

تعریف: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه‌ی قائمه C، نسبت طول ضلع مجاور زاویه‌ی A به طول ضلع مقابل زاویه‌ی A را کتانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با نماد $\cot A$ یا $\operatorname{cotg} A$ نشان می‌دهیم. بنابراین:




$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل زاویه } A} = \frac{b}{a}$$

**مثال:** با توجه به شکل زیر، می‌خواهیم کتانژانت زاویه A و کتانژانت زاویه B را بیابیم.




به کمک تعریف داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل زاویه } A} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$\cot B = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } B}{\text{طول ضلع مقابل زاویه } B} = \frac{۱۵}{۸}$$

**نکته:** همان‌طور که مشاهده می‌کنید کتانژانت یک زاویه، معکوس تانژانت آن زاویه است. بنابراین:

$$\cot A = \frac{۱}{\tan A} \quad , \quad \tan A \cot A = ۱$$

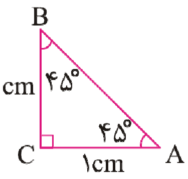
**توجه:** در یک مثلث قائم‌الزاویه به هر یک از عبارت‌های $\sin\alpha$، $\cos\alpha$، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ «نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\alpha$» می‌گویند.

### محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم

**الف) محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $۴۵^\circ$:**

از آن جا که طول ضلع اهمیتی ندارد، مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه‌ی قائمه C و اضلاع قائمه یک سانتی‌متر را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه فیثاغورث داریم:

$$AB^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۲}$$



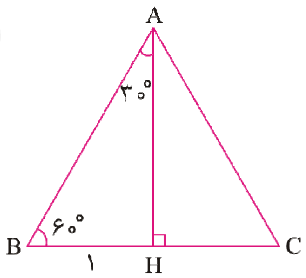

حال نسبت‌های مثلثاتی زاویه A که برابر با ۴۵ درجه است را به دست می‌آوریم:

$$\sin A = \sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos A = \cos ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan A = \tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{۱} = ۱ \qquad \cot A = \cot ۴۵^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

**ب) محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $۳۰^\circ$ و $۶۰^\circ$:**

مثلث متساوی‌الاضلاعی به اضلاع ۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. زوایای داخلی این مثلث $۶۰^\circ$ است. ارتفاع AH را در این مثلث رسم می‌کنیم، می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع، میانه و نیم‌ساز نیز می‌باشد. در نتیجه $BH = ۱$ و $B\hat{A}H = ۳۰^\circ$.




حال طبق قضیه فیثاغورث در مثلث AHB داریم:

$$BA^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow AH^۲ = ۳ \Rightarrow AH = \sqrt{۳}$$

حال می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $B\hat{A}H = ۳۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ را بیابیم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} \qquad \cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{۳} \qquad \cot ۶۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه داریم:

| θ / نسبت‌های مثلثاتی | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\cot\theta$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$A=(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\sin 30^\circ-\cos 45^\circ)$$

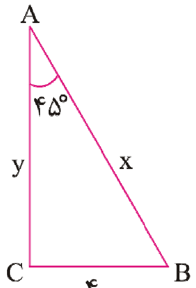
$$B=\frac{\sin 30^\circ\cos 60^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$$

پاسخ:

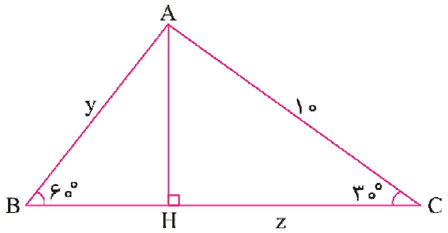
$$A=(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\sin 30^\circ-\cos 45^\circ)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\frac{\sin 30^\circ\cos 60^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{9}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{9}}=\frac{\cancel{9}^{3}}{4\times\cancel{6}_{2}}=\frac{3}{8}$$

**مثال:** با توجه به شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.



(الف)



(ب)

پاسخ:

الف)

$$\sin 45^\circ=\frac{4}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=4\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{y}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$$

ب)

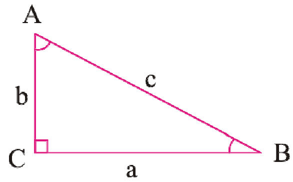
$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AH}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow AH=5$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{z}{۱۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow z = ۵\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۵}{y} \Rightarrow y = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

**نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم:** دوباره به مثلث قائم‌الزاویه $ABC$ با زاویه‌ی قائمه $C$ برگردیم، در این مثلث دو زاویه $A$ و $B$ متمم یکدیگرند.

برای این دو زاویه داریم:




$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos B = \frac{a}{c}$$

بنابراین می‌توان گفت $\sin A = \cos B$، به همین ترتیب داریم:

$$\sin B = \frac{b}{c}, \cos A = \frac{b}{c}$$

در نتیجه $\cos A = \sin B$.

**نکته:** برای زاویه حاده $\theta$ داریم:

$$\cos\theta = \sin(۹۰^\circ - \theta) \ , \ \sin\theta = \cos(۹۰^\circ - \theta)$$

به عبارت دیگر سینوس هر زاویه برابر است با کسینوس متمم آن زاویه و به همین ترتیب می‌توان گفت کسینوس هر زاویه برابر است با سینوس متمم آن زاویه.

**مثال:** داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۶۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ \quad , \quad \cos ۱۵^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin ۷۵^\circ$$

**مثال:** مقدار عددی عبارت $A = \frac{\sin ۵^\circ \sin ۱۰^\circ \sin ۱۵^\circ}{\cos ۸۵^\circ \cos ۸۰^\circ \cos ۷۵^\circ}$ برابر است با:

$$\sin ۵^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۵^\circ) = \cos ۸۵^\circ \ , \ \sin ۱۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۱۰^\circ) = \cos ۸۰^\circ$$

$$\sin ۱۵^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) = \cos ۷۵^\circ$$

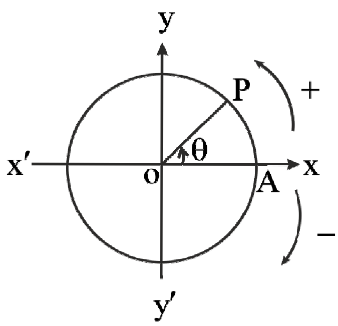
بنابراین:

$$A = \frac{\sin ۵^\circ \sin ۱۰^\circ \sin ۱۵^\circ}{\sin ۵^\circ \sin ۱۰^\circ \sin ۱۵^\circ} = ۱$$

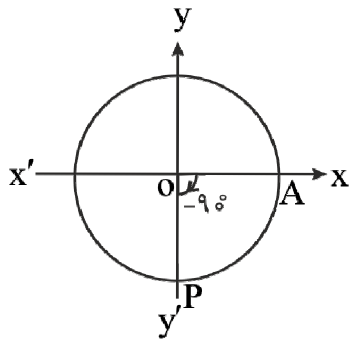
### درس دوم: دایره مثلثاتی

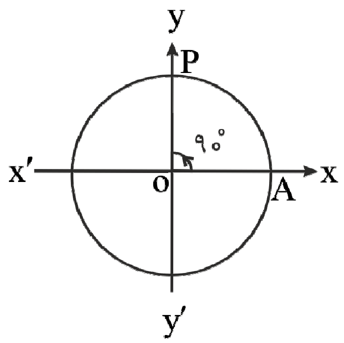
دایره مثلثاتی، دایره‌ای جهت‌دار به شعاع واحد است. در این دایره ابتدا هر زاویه بر $OA$ یعنی جهت مثبت قطر افقی منطبق است اگر $P$ روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه $AOP$ مثبت و اگر $P$ روی این دایره در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه $AOP$ منفی است.

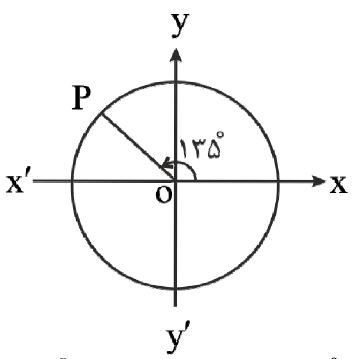
در واقع جهت دایره در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

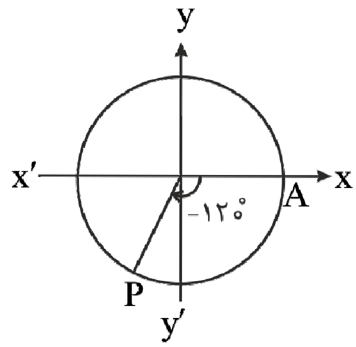


**مثال:** روی دایره مثلثاتی، زاویه‌های ‎−۹۰°‎ ، ‎۹۰°‎، ‎۱۳۵°‎، ‎−۱۲۰°‎ را نشان می‌دهیم:

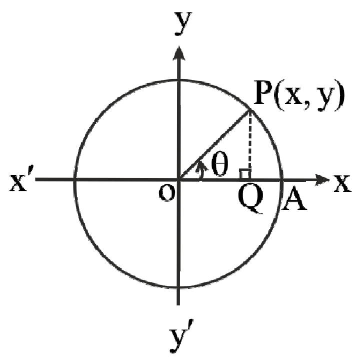



دایره مثلثاتی زیر را در نظر بگیرید، در مثلث قائم‌الزاویه OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\theta$ به صورت زیر به دست می‌آید:



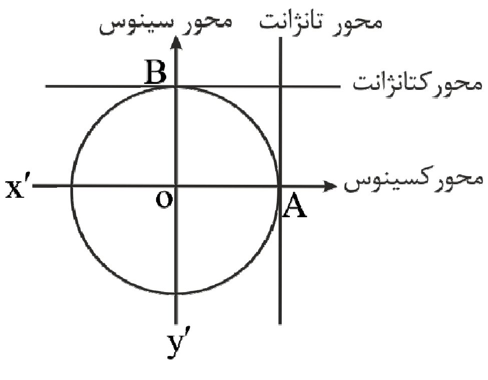

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

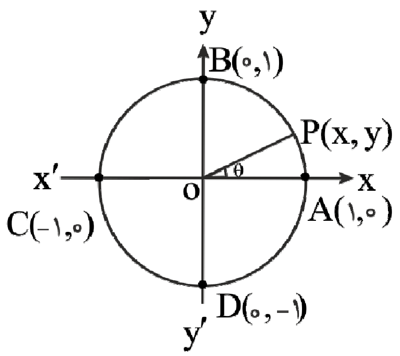
$$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}$$

**نکته:** محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. اگر در نقاط $B, A$، دو مماس بر دایره مثلثاتی رسم کنیم خطوط به‌دست آمده به ترتیب محورهای تانژانت و کتانژانت خواهند بود.



نسبت‌های مثلثای زاویه‌های °۰ ، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰

دایره مثلثاتی زیر را در نظر بگیرید:




اگر $\theta = ۰^\circ$ آنگاه نقطه $P$ روی نقطه $A(۱,۰)$ قرار می‌گیرد در این صورت داریم:

$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin ۰^\circ = ۰$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow \cos ۰^\circ = ۱$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan ۰^\circ = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot ۰^\circ = \frac{۱}{۰}$$ تعریف نشده

اگر $\theta = ۹۰^\circ$ آنگاه نقطه $P$ روی نقطه $B(۰,۱)$ قرار می‌گیرد در این صورت داریم:

$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin ۹۰^\circ = ۱$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow \cos ۹۰^\circ = ۰$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan ۹۰^\circ = \frac{۱}{۰}$$ تعریف نشده

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot ۹۰^\circ = \frac{۰}{۱} = ۰$$

اگر $\theta = ۱۸۰^\circ$ آنگاه نقطه $P$ روی نقطه $C(-۱,۰)$ قرار می‌گیرد در این صورت داریم:

$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin ۱۸۰^\circ = ۰$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow \cos ۱۸۰^\circ = -۱$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan ۱۸۰^\circ = \frac{۰}{-۱} = ۰$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot ۱۸۰^\circ = \frac{-۱}{۰}$$ تعریف نشده

اگر $\theta = ۲۷۰^\circ$ آنگاه نقطه $P$ روی نقطه $D(۰,-۱)$ قرار می‌گیرد در این صورت داریم:

$\sin\theta = y \Rightarrow \sin ۲۷۰^\circ = -۱$

$\cos\theta = x \Rightarrow \cos ۲۷۰^\circ = ۰$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan ۲۷۰^\circ = \frac{-۱}{۰}$ تعریف نشده

$\cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot ۲۷۰^\circ = \frac{۰}{-۱} = ۰$

اگر $\theta = ۳۶۰^\circ$ آنگاه نقطه $P$ دوباره روی نقطه $A(۱,۰)$ قرار می‌گیرد در این صورت نسبت‌های مثلثاتی زاویه $۳۶۰^\circ$ با زاویه $۰^\circ$ برابر می‌شود.

در نتیجه داریم:

| $\theta$ / نسبت‌های مثلثاتی | $۰^\circ$ | $۹۰^\circ$ | $۱۸۰^\circ$ | $۲۷۰^\circ$ | $۳۶۰^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | ۰ | ۱ | ۰ | $-۱$ | ۰ |
| $\cos\theta$ | ۱ | ۰ | $-۱$ | ۰ | ۱ |
| $\tan\theta$ | ۰ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده | ۰ |
| $\cot\theta$ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده |

### علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر چهار ربع مثلثاتی

به کمک تساوی زیر می‌توانیم علامت نسبت‌های مثلثاتی را پیدا کنیم:

$\sin\theta = y$

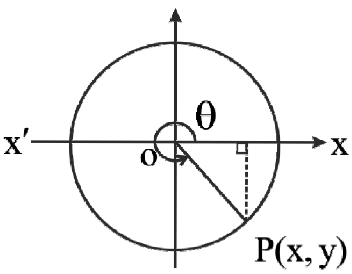
$\cos\theta = x$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$

| مقدار | ربع اول $x, y > ۰$ | ربع دوم $x < ۰, y > ۰$ | ربع سوم $x, y < ۰$ | ربع چهارم $x > ۰, y < ۰$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | + | + | − | − |
| $\cos\theta$ | + | − | − | + |
| $\tan\theta$ | + | − | + | − |
| $\cot\theta$ | + | − | + | − |

**مثال:** اگر $\theta$ زاویه‌ای در ربع چهارم مثلثاتی باشد و $\cos\theta = \frac{۲}{۳}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\theta$ را بیابید.



پاسخ:

$$\cos\theta = x = \frac{۲}{۳}$$

پس $P$ نقطه‌ای به طول $\frac{۲}{۳}$ است. حال عرض نقطه $P$ را به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

چون نقطه $P$ در ناحیه چهارم قرار دارد پس عرض آن منفی و $y = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ قابل قبول است.

حال داریم:

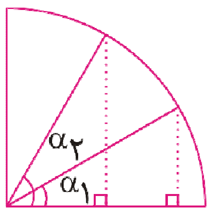
$$\sin\theta = y = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{۲}{۳}}{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۵}} = -\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

### تغییرات نسبت‌های مثلثاتی نسبت به افزایش زاویه

با توجه به شکل زیر، وتر هر دو مثلث به اندازه‌ی شعاع دایره است، بنابراین وتر دو مثلث یکسان است. حال با افزایش زاویه از $\alpha_۱$ به $\alpha_۲$ همان‌طور که مشاهده می‌کنید طول ضلع مقابل زیاد و طول ضلع مجاور کم می‌شود. بنابراین سینوس این زاویه زیاد ولی کسینوس آن کم می‌شود.




**نکته:** با زیاد شدن زاویه‌ی حاده $\alpha$، از $۰^\circ$ تا $۹۰^\circ$، مقدار سینوس آن زاویه بزرگ‌تر ولی مقدار کسینوس آن کمتر می‌شود.

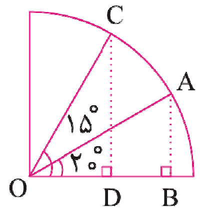
$$\alpha_۲ > \alpha_۱ \Rightarrow \sin\alpha_۲ > \sin\alpha_۱, \cos\alpha_۲ < \cos\alpha_۱$$

با توجه به شکل بالا، از آن‌جا که تانژانت یک زاویه نسبت طول ضلع مقابل آن زاویه به ضلع مجاور آن زاویه است. با افزایش زاویه از $\alpha_۱$ به $\alpha_۲$ همان‌طور که مشاهده می‌کنید طول ضلع مقابل زیاد و طول ضلع مجاور کاهش می‌یابد، بنابراین تانژانت افزایش می‌یابد.

**نکته:** با افزایش مقدار زاویه‌ی $\alpha$ از $۰^\circ$ تا $۹۰^\circ$ مقدار تانژانت این زاویه بزرگ‌تر می‌شود.

$$\alpha_۲ > \alpha_۱ \Rightarrow \tan\alpha_۲ > \tan\alpha_۱$$

**مثال:** در شکل زیر زاویه‌های °۳۵ و °۲۰ در ربع دایره‌ای به شعاع یک رسم شده‌اند، مقدار عددی $\cos 20^\circ$ و $\cos 35^\circ$ و همین‌طور مقدار $\sin 20^\circ$ و $\sin 35^\circ$ را با هم مقایسه کنید.



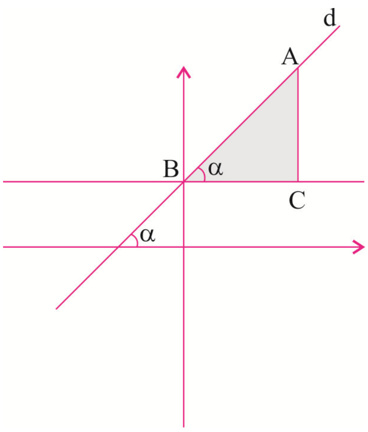

پاسخ:

$$\cos 20^\circ = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$$
$$\cos 35^\circ = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD$$
$$OD < OB \Rightarrow \cos 35^\circ < \cos 20^\circ$$
$$\sin 20^\circ = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$$
$$\sin 35^\circ = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD$$
$$CD > AB \Rightarrow \sin 35^\circ > \sin 20^\circ$$

## رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

خط d را در شکل زیر در نظر بگیرید که با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی $\alpha$ می‌سازد. نقطه‌های A و B را روی این خط در نظر بگیرید، از نقطه‌ی B خطی موازی با محور xها و از نقطه‌ی A خطی موازی با محور yها رسم کرده‌ایم.

همان‌طور که می‌دانید، شیب یک خط برابر است با نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده بنابراین داریم: $m = \frac{AC}{BC}$.



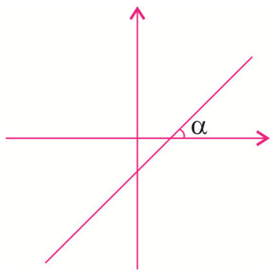

از طرفی داریم:

$$\tan B = \frac{AC}{BC}$$

از آن جا که طبق قضیه خطوط مورب و موازی، زاویه‌ی $B$ با زاویه‌ای که خط با محور $x$ها می‌سازد برابر است داریم:

$$\tan\alpha=\frac{AC}{BC}=m$$

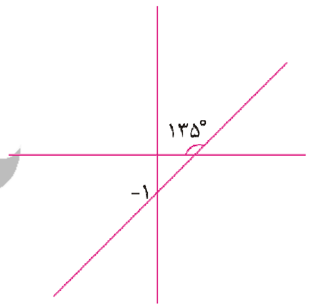
**نکته:** شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور $x$ها می‌سازد.




$$\tan\alpha=m$$

**مثال:** زاویه‌ای که خط $y=\sqrt{۳}x+۴$ با جهت مثبت محور $x$ها می‌سازد برابر است با $۶۰^\circ$، زیرا $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$.

**مثال:** معادله خط زیر را بنویسید.




پاسخ: زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور $x$ها می‌سازد برابر است با $۱۸۰-۱۳۵^\circ=۴۵^\circ$. بنابراین شیب این خط برابر با $\tan ۴۵^\circ$ می‌باشد.

$$m=\tan ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حال از آن جا که نقطه‌ای به مختصات $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$ روی این خط است، داریم:

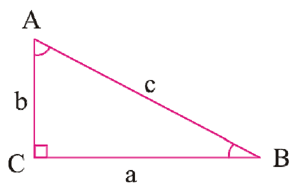
$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\Rightarrow y+۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-۰)\Rightarrow y+۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x-۱$$

## درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$۱)\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$$

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با زاویه قائمه $C$ را در نظر بگیرید. در این مثلث داریم:

$$\sin A=\frac{a}{c}\quad و \quad \cos A=\frac{b}{c}$$



$$\sin^{۲}A+\cos^{۲}A=\frac{a^{۲}}{c^{۲}}+\frac{b^{۲}}{c^{۲}}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{c^{۲}}$$

حال طبق قضیه فیثاغورث داریم: $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ در نتیجه:

$$\sin^{۲}A+\cos^{۲}A=\frac{C^{۲}}{C^{۲}}=۱$$

**مثال:** $\sin^{۲}۱۵^{\circ}+\cos^{۲}۱۵^{\circ}=۱$

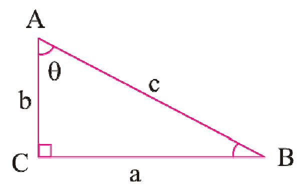
**مثال:** اگر $x$ زاویه‌ای حاده باشد و $\cos x=\frac{۴}{۵}$ باشد، $\sin x$ را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\cos^{۲}x+\sin^{۲}x=۱$ بنابراین:

$$\frac{۱۶}{۲۵}+\sin^{۲}x=۱\Rightarrow\sin^{۲}x=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\sin x=\frac{۳}{۵}$$

$$۲)\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

برای به دست آوردن این رابطه مثلث زیر را در نظر بگیرید داریم:




$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{a}{c}\\ \cos\theta=\frac{b}{c}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\tan\theta$$

**نتیجه:**

$$\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

**مثال:** اگر $\sin x=\frac{۴}{۵}$ و $\cos x=\frac{۳}{۵}$ باشد، داریم:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

**مثال:** اگر بدانیم $\tan x=۳$، حاصل عبارت $\frac{۲\sin x+۳\cos x}{۵\cos x-۴\sin x}$ را به دست آورید.

پاسخ: از آن جا که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، صورت و مخرج عبارت را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲\frac{\sin x}{\cos x}+۳\frac{\cos x}{\cos x}}{۵\frac{\cos x}{\cos x}-۴\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x+۳}{۵-۴\tan x}=\frac{\overset{۶}{\cancel{۲\times۳}}+۳}{۵-\underset{۱۲}{\cancel{۴\times۳}}}=\frac{۹}{-۷}=-\frac{۹}{۷}$$

$$۳) ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta} \qquad (\cos\theta\neq ۰)$$

به کمک رابطه $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ داریم:

$$۱+\tan^۲\theta=۱+\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$۴) ۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta} \qquad (\sin\theta\neq ۰)$$

به کمک رابطه $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ داریم:

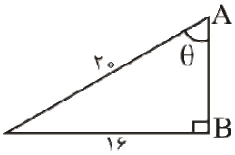
$$۱+\cot^۲\theta=۱+\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

توجه: هریک از تساوی‌های بالا که به ازای هر $\theta$ همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

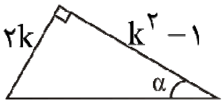
**مثال**

۱- در مثلث‌های زیر نسبت مثلثاتی مورد نظر را محاسبه کنید.

الف) $\tan\theta, \sin\theta = ?$




ب) $\cos\alpha, \cot\alpha = ?$



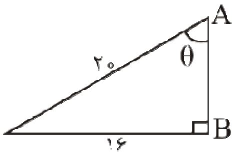

(برحسب k)

پاسخ:

الف)

$$AB = \sqrt{۴۰۰ - ۲۵۶} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

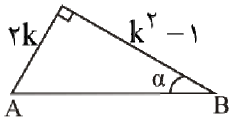
$$\sin\theta = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵} \quad , \quad \tan\theta = \frac{۱۶}{۱۲} = \frac{۴}{۳}$$




ب)

$$AB = \sqrt{۴k^۲ + (k^۲ - ۱)^۲} = \sqrt{۴k^۲ + k^۴ + ۱ - ۲k^۲} = \sqrt{(k^۲+۱)^۲} = k^۲ + ۱$$

$$\cos\alpha = \frac{k^۲ - ۱}{k^۲ + ۱} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{k^۲ - ۱}{۲k}$$




۲- اگر $\alpha$ یک زاویه‌ی تند باشد، در هر مورد سایر نسبت‌های مثلثاتی $\alpha$ را بیابید.

الف) $\sin\alpha = \frac{۱}{۵}$

ب) $\cos\alpha = \frac{۱}{۵}$

ج) $\tan\alpha = \frac{۱}{۵}$

پاسخ: الف)

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۲۵}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{۱۲}{\sqrt{۶}} = ۲\sqrt{۶}$$

ب)

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\tan\alpha = 2\sqrt{6}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

ج)

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 5$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = 5\sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + 25\sin^2\alpha = 1 \Rightarrow 26\sin^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{26} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

۳- اگر $\tan x = 3$، آن‌گاه مقدار عبارت $\frac{2\sin x + 3\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\tan x = 3 \Rightarrow \sin x = 3\cos x$$

$$\frac{2\sin x + 3\cos x}{2\sin x - 3\cos x} = \frac{2(3\cos x) + 3\cos x}{2(3\cos x) - 3\cos x} = \frac{9\cos x}{3\cos x} = 3$$

۴- نشان دهید:

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

پاسخ:

$$\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \sin^2\theta$$

۵- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ آن‌گاه مقدار عبارت $\sin x.\cos x$ را به‌دست آورید.

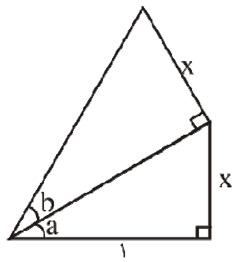
پاسخ:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin\cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - 2\sin x.\cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2\sin x.\cos x = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{4}{9}$$

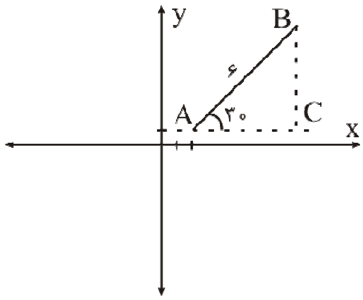
۶- در شکل زیر، نسبت tan b به tan a را به‌دست آورید.




پاسخ:

$$\tan a = x$$
$$\tan b = \frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}} \Rightarrow \frac{\tan b}{\tan a} = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

۷- از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ با زاویه‌ی $۳۰^\circ$ نسبت به محور x، ۶ واحد حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ی B برسیم. مختصات نقطـه‌ی B را بیابید.




پاسخ:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BC}{۶} \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$$
$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AC}{۶} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$$
$$B = \begin{bmatrix} ۲+۳\sqrt{۳} \\ ۱+۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲+۳\sqrt{۳} \\ ۴ \end{bmatrix}$$

۸- ثابت کنید اگر $۳۰^\circ < \theta < ۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه نابرابری $\frac{\cos\theta}{\sqrt{۳}} < \sin\theta < \sqrt{۳}\cos\theta$ برقرار است.

پاسخ:

$$\tan ۳۰^\circ < \tan\theta < \tan ۶۰^\circ$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{۳} < \tan\theta < \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} < \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sqrt{۳}} < \sin\theta < \sqrt{۳}\cos\theta$$

۹- مقدار عبارت $\frac{\sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ - \tan^{۲} ۴۵^\circ}{\cos ۳۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}$ را به دست آورید.

پاسخ:

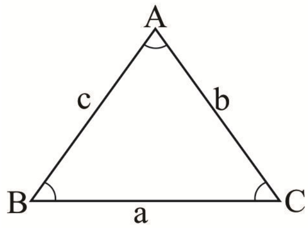
$$\frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - ۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱} = \frac{\frac{-۳}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}-۲}{۲}} = \frac{-۶}{۴(\sqrt{۳}-۲)} = \frac{-۳}{۲(\sqrt{۳}-۲)}$$

آموزش تکمیلی

## کاربردهایی از مثلثات

### الف) قانون کسینوس‌ها

این قانون زمانی رخ می‌دهد که در مثلثی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها معلوم باشد به کمک این قانون می‌توان ضلع سوم را به‌دست آورد.




اگر زاویه $A$ و دو ضلع $c,b$ مشخص باشند، آنگاه داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

**نکته:** در حالت خاص اگر $\hat{A} = 90^\circ$ باشد در این صورت داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

که همان رابطه فیثاغورس را نتیجه می‌دهد.

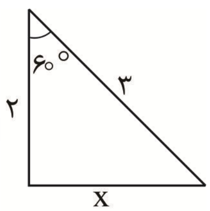
اگر زاویه $B$ و دو ضلع $c,a$ مشخص باشند، آنگاه داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

اگر زاویه $C$ و دو ضلع $b,a$ مشخص باشند، آنگاه داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

**مثال:** اگر دو ضلع مثلث به ترتیب ۳ و ۲ و زاویه بین آن‌ها $60^\circ$ باشد، محیط مثلث را بیابید.




پاسخ:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos 60^\circ$$

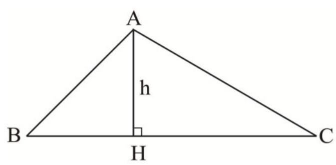
$$x^2 = 4 + 9 - (12 \times \frac{1}{2}) = 7$$

$$x = \sqrt{7}$$

$$\text{محیط مثلث} = 2 + 3 + \sqrt{7} = 5 + \sqrt{7}$$

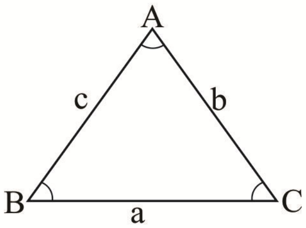
**نکته:** به کمک قانون کسینوس‌ها داریم:

$$BC = AB\cos\hat{B} + AC\cos\hat{C}$$



**ب) قانون سینوس‌ها**

این قانون زمانی رخ می‌دهد که دو زاویه و یک ضلع معلوم باشد. به کمک آن دو ضلع دیگر را می‌یابیم.




$$\frac{a}{\sin \hat{A}}=\frac{b}{\sin \hat{B}}=\frac{c}{\sin \hat{C}}$$

**مثال:** در مثلثی $a=۳$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۵^\circ$ محیط را بیابید.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{A}=۷۵^\circ$$

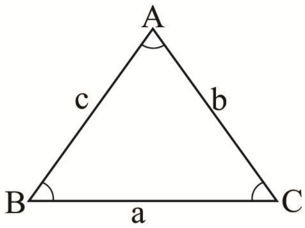
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{\sin ۷۵^\circ}=\frac{b}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ}\begin{cases}\dfrac{۳}{۰/۹۷}=\dfrac{b}{۰/۸۷}\\[2mm] \dfrac{۳}{۰/۹۷}=\dfrac{c}{۰/۷۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b=۲/۷\,,\, c=۲/۲$$

$$\text{محیط}=۲/۷+۲/۲+۳=۷/۹$$

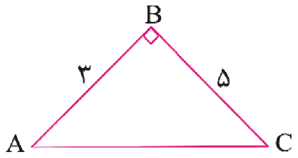
**نکته:** به کمک قانون سینوس‌ها داریم:

$$\text{مساحت } S_{ABC}=\frac{۱}{۲}ac\sin \hat{B}=\frac{۱}{۲}ab\sin \hat{C}=\frac{۱}{۲}bc\sin \hat{A}$$

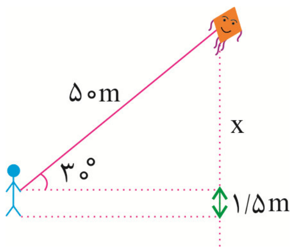


## تمرین

۱. نسبت‌های مثلثاتی زاویه A در شکل زیر را بیابید.

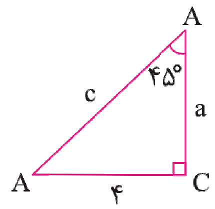



۲.در شکل زیر ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

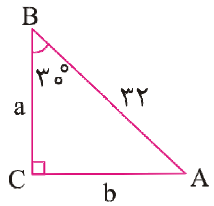



۳.در هر یک از شکل‌های زیر طول اضلاع مجهول را به دست آورید.

الف)




ب)




۴.معادله‌ی خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها، زاویه ۴۵ درجه بسازد و از نقطه‌ی $A(-۲,۴)$ بگذرد.

۵. اگر $\tan\theta = ۲$ باشد، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بیابید.

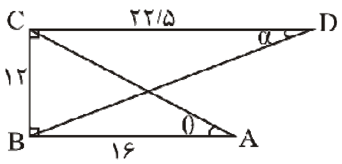
۶.حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{۲\cos^{۲}۳۰^\circ - ۲\sin۳۰^\circ}{۲\tan۴۵^\circ + ۳\cos^{۲}۶۰^\circ}$

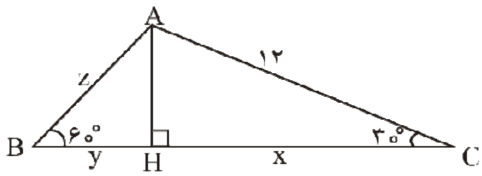
ب) $\dfrac{\cos^{۲}۳۰^\circ + ۲\sin^{۲}۳۰^\circ - \tan۴۵^\circ}{\tan۴۵^\circ - \cos۶۰^\circ}$

ج) $\dfrac{\sin۳۰^\circ + \cos۳۰^\circ}{\tan۴۵^\circ + \tan۶۰^\circ}$

۷.در شکل زیر، مقادیر $\cos\theta, \sin\alpha$ را به‌دست آورید.



۸.با توجه به شکل زیر، مقدار عددی $x+y+z$ را به‌دست آورید.




۹.مقدار عددی عبارت $\frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۶۰^\circ \tan ۳۰^\circ}$ چیست؟

۱۰.کدام تساوی درست و کدام نادرست است؟

الف) $۲\sin ۳۰^\circ = \sin(۲\times ۳۰^\circ)$

ب) $\sin ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ = \sin(۳۰^\circ + ۶۰^\circ)$

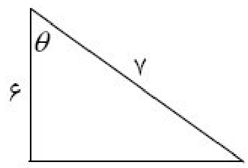
ج) $\cos ۲۰^\circ = \sin ۷۰^\circ$

د) $\sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ = ۱$

۱۱.ساده شده‌ی عبارت $\cos^۲\theta(۲+\tan^۲\theta)$ را بیابید.

۱۲.نردبانی به طول ۸ متر که روی زمین خوابانده شده است را به دیواری عمود تکیه می‌دهیم. زاویه‌ی بین نردبان و زمین $۳۰^\circ$ شده است. نردبان به ارتفاع چند متر از دیوار می‌رسد؟

۱۳.در مثلث قائم الزاویه زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده $\theta$ را پیدا کنید.




۱۴.در یک مثلث قائم الزاویه $\sin\theta = \frac{۲}{۵}$ است. اگر طول وتر برابر ۱۰ باشد، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را به دست آورید.

۱۵.اگر $\theta$ زاویه حاده و $\cos\theta = \frac{۱}{۴}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی $\theta$ را پیدا کنید.

۱۶. هر یک از زاویه‌های $-۳۰^\circ$، $-۲۷۰^\circ$، $۲۲۵^\circ$ و $۱۲۰^\circ$ را روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۱۷.حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ + \sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ$

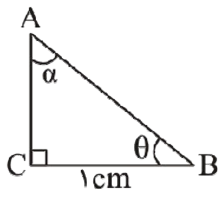
ب) $\tan ۳۷^\circ \times \cot ۳۷^\circ - \sin ۹۰^\circ + \sin^۲ ۴۰^\circ + \cos^۲ ۴۰^\circ$

ج) $(\cos^۲ ۴۵^\circ \div \cot^۲ ۶۰^\circ) - \tan^۲ ۶۰^\circ \times \sin ۳۰^\circ$

۱۸.در مثلث $ABC$ داریم $a=۵$ و $c=۴$ و $\sin B = \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$. طول ضلع $b$ و $\sin C$ را به دست آورید.

۱۹. مقدار عددی عبارت $۴\sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ - ۳\tan ۴۵^\circ + \tan^۲ ۶۰^\circ$ چیست؟

۲۰. ساده شده عبارت $\tan\theta + \frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$ را بیابید.



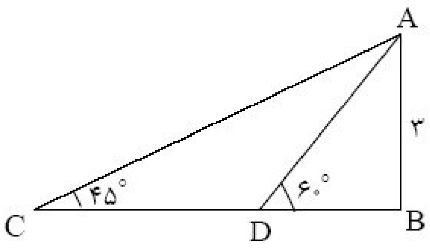
۲۱.در شکل زیر، اگر $\tan\theta = p$ باشد، مقدار $\mathrm{Cos}\alpha$ بر حسب $p$ را بیابید.

۲۲.در مثلث قائم الزاویه $ABC$ ( $\hat{B} = ۹۰^\circ$)، داریم $\tan C = ۲$ و $BC = ۴$. مقدار $\sin C$ برابر چیست؟

۲۳.حاصل $\dfrac{\sin ۳۵^\circ \cos ۴۵^\circ}{\tan ۶۰^\circ \cos ۵۵^\circ}$ را بیابید.

۲۴. اگر $\sin\theta = \dfrac{۱}{۵}$ و $\theta$ زاویه‌ای حاده باشد، آن‌گاه $\cos\theta$ چقدر است؟

۲۵. در مثلث قائم الزاویه $ABC$ زیر، طول $CD$ را به دست آورید.




۲۶. کدام تساوی درست و کدام نادرست است؟

الف) $\sin ۶۰^\circ = ۲\sin ۳۰^\circ$

ب) $\sin^۲ ۶۰^\circ - \sin^۲ ۳۰^\circ = ۱$

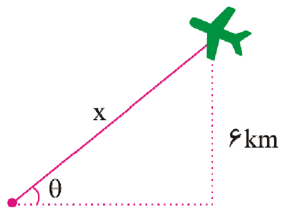
ج) $\tan ۶۰^\circ = ۲\tan ۳۰^\circ$

د) $\sin^۲ ۳۰^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ = \sin^۲ ۴۰^\circ + \cos^۲ ۴۰^\circ$

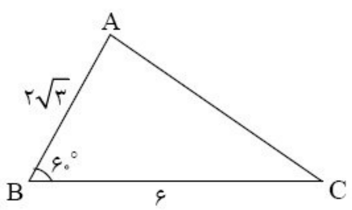
۲۷. مقدار $\dfrac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۷۵^\circ}$ چیست؟

۲۸. اگر بدانیم $\theta$ زاویه‌ای حاده است و $\sin\theta = ۰/۶$، مقدار $\tan\theta$ چیست؟

۲۹.یک هواپیما با ارتفاع ۶ کیلومتر به سمت برج مراقبت یک فرودگاه حرکت می‌کند. با توجه به شکل فاصله‌ی این هواپیما از بـرج مراقبت به ازای $\theta = ۳۰^\circ$ چقدر است؟




۳۰. مساحت مثلث زیر را پیدا کنید.




۳۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin ۲۵^\circ > \cos ۲۵^\circ$

ب) $\sin ۳۰^\circ + \cos ۶۰^\circ = ۱$

ج) اگر برای زاویه حاده $\theta$ داشته باشیم $\sin\theta = ۰$ آن‌گاه واضح است که $\cos\theta = ۱$ می باشد.

د) اگر $\theta+\alpha=90^\circ$ آن‌گاه $\sin\alpha=\cos\theta$.

۳۲. نشان دهید $\cos^2 x-\sin^2 x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

۳۳.خط $6x-2\sqrt{3}y=5$ با جهت مثبت محور **x**ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۳۴.مقدار عددی عبارت $\cos^4 20^\circ-\sin^4 20^\circ-2\cos^2 20^\circ$ را بیابید.

۳۵.سینوس زاویه‌ای که خط $\sqrt{3}x-3y=5$ با جهت مثبت محور $x$ ها می‌سازد را بیابید.

۳۶. اگر $\tan\theta=5$، آن‌گاه مقدار کسر $\dfrac{2\sin\theta+4\cos\theta}{2\sin\theta-4\cos\theta}$ چیست؟

۳۷. اگر **x** یک زاویه دلخواه باشد ساده شده عبارت $(\sin x-\cos x)^2$ را بیابید.

۳۸.اگر $\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ، مقدار $\tan x$ چقدر است؟

۳۹.حاصل عبارت $\dfrac{2\sin10^\circ\sin20^\circ\sin30^\circ\sin40^\circ}{3\cos50^\circ\cos60^\circ\cos70^\circ\cos80^\circ}$ را بیابید.

۴۰.حاصل عبارت $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2$ را بیابید.

۴۱.در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}(A=90^\circ)$، $AH$ ارتفاع است. ثابت کنید:

$$AB^2=BH.BC$$

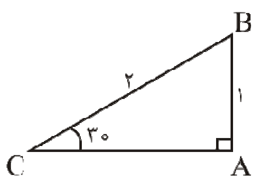
۴۲.اگر $a\sin^2 x-b\cos^2 x=a-b$ آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

۴۳.اگر $\sin x=\dfrac{t-1}{t+1},\cos y=\dfrac{2\sqrt{t}}{t+1}$ ثابت کنید $x=y$.

۴۴.اگر $\cos x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ , $a,b>0$ آن‌گاه حاصل عبارت $y=\cos5x-\cos3x$ را بیابید.

۴۵.در شکل زیر ضلع $AC$ را از طرف $C$ به اندازه $BC$ امتداد دهید تا نقطه $D$ به دست آید. نشان دهید $\widehat{BDA}=15$ و بـه کمـک شکل نسبت‌های مثلثاتی $15^\circ$ را به‌دست آورید.




۴۶.اگر $b=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ آن‌گاه ثابت کنید:

$$\sin^3 x+\frac{1}{\sin^3 x}=b^3-3b$$

۴۷.اگر $\tan x-\cot x=2$ آن‌گاه مقدار عبارت $\tan^2 x+\cot^2 x$ را بیابید.

۴۸.به ازای کدام مقدار $\theta$ تساوی $\sin(3\theta+20^\circ)=\cos 2\theta$ برقرار است؟

۴۹.اگر $\cot x=\frac{1}{3}$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}{3\sin x-3\cos x}$$

۵۰.اگر $x=r\cos\alpha\cos\theta$، $z=r\sin\alpha, y=r\cos\alpha\sin\theta$ ، حاصل $x^2+y^2+z^2$ را به‌دست آورید.