پیش‌آزمون مقدماتی

پایه‌های دهم و سوم دبیرستان

لیگ علوم کامپیوتر و برنامه‌نویسی

International Scientific League of PAYA2017

بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور و پنجمین دوره مسابقات دانش آموزی جهان اسلام در ایران

از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، علوم کامپیوتر-برنامه نویسی و پژوهشی

تلفن : -۶۶۱۲۹۲۸۴- ۶۶۱۲۸۰۳۵- ۶۶۱۲۸۰۳۱

www.Payaleague.ir

Telegram.me/payaleague

گراف‌ها و کاربردهای آن

مقدمه

در این قسمت که شامل سه فصل است با الفبای نظریه‌ی گراف‌ها وکاربردهایش آشنا می‌شویم. عمدتاً از طبیعت جذاب گراف‌ها استفاده می‌کنیم، شهود را به‌کار می‌بندیم و با مثال‌های ملموس و معماهای گوناگون مفاهیم را روشن می‌سازیم. در عین حال دربست تسلیم شهود نمی‌شویم و در مواردی اثبات دقیق قضایا را ارائه می‌دهیم. گاه از کاربردهایی استفاده می‌کنیم که ممکن است تاحدی بدیهی به نظر برسند، اما هرگز معمّاها و مسائل ظاهراً کوچک را که انگیزه بخش‌اند دست کم نمی‌گیریم، زیرا در موارد بسیاری این‌گونه مسائل سرآغاز ایده‌ها و حتی نظریه‌های مهم ریاضی بوده‌اند. از دانش‌پژوهانی که دوره‌ی دبیرستان را پشت سرگذاشته‌اند انتظار داریم ذهن پویای خود را به کار اندازند و برای پاسخگویی به سؤال‌های عدیده‌ای که خود طرح می‌کنند، یا پرسش‌هایی که در متن مطرح می‌شوند ابتدا مثال‌های ساده و بعد رده‌های خاص گراف‌ها را مورد توجه قرار دهند و مطمئن باشند که در این زمینه می‌توانند مسائلی را مطرح کنند که در عین سادگی بیان، بزرگ‌ترین ریاضیدانان نیز از حل آن‌ها عاجز باشند.

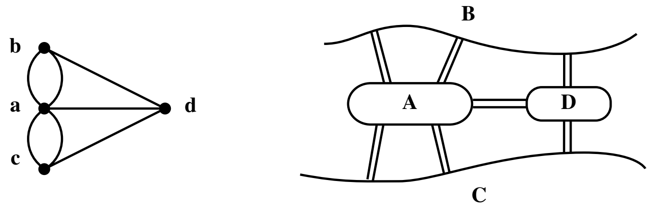
فصل ۱

آشنایی با گراف‌ها

در این فصل با بیان چند مثال زمینه را برای تعریف انواع گراف‌ها آماده می‌کنیم و آن را با ارائه‌ی چند تعریف و قرارداد پایان می‌دهیم.

۱ـ۱ـ چند مثال

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. معمّای زیر سال‌ها شهروندان را سرگرم کرده بود : آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان اول بازگشت؟ اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسأله‌ی پل‌های کونیگسبرگ نظریه‌ی گراف‌ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه‌ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه، پاره‌خط یا کمانی بین دو نقطه‌ی متناظر با آن‌ها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق شکل ۱ به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت.



شکل ۱ـ نمای شهرکونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

امروزه این مدل را یک **گراف** یا، به سبب وجود «چند» به اصطلاح خط بین دو نقطه، به‌طور دقیق‌تر یک **گراف چندگانه** می‌نامند. اینک ما هم می‌توانیم مسائل مختلفی را به زبان نظریه‌ی گراف‌ها

بیان کنیم.

مثال ۱: فرض می‌کنیم پنج تیم به نام‌های a، b، c، d و e باید دو به دو با یکدیگر مسابقه بدهند. پس از چندی می‌بینیم که:

a با b، c و e مسابقه داده (و بر همگی پیروز شده است).

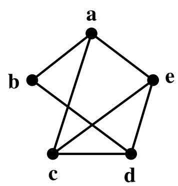
b با a و d روبه‌رو شده (و از هر دو شکست خورده است).

c با a، d و e مسابقه داده (بر d و e پیروز شده و از a شکست خورده است).

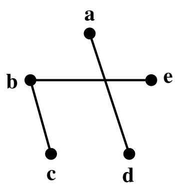
d با b، c و e بازی کرده (و b و e را شکست داده و از c شکست خورده است).

e با a، c و d مسابقه داده است (پیروزی‌ها و شکست‌های e قبلاً مشخص شده‌اند).

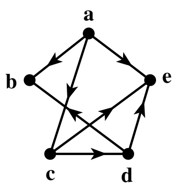
این وضعیت را می‌توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم. به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و دو نقطه را با پاره‌خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم هرگاه تیم‌های متناظر با هم مسابقه داده باشند. شکل ۲ مدل مربوط به این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

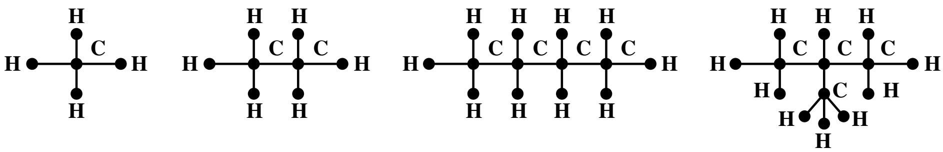
سه شکل مربوط به مثال ۱

ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری هم نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است. برای این کار باز هم به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و این بار دو نقطه را با پاره‌خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه دو تیم مربوط با هم بازی نکرده باشند. نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۳ نمایش داده شده است نشان می‌دهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند.

فرض می‌کنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند. (برندگان را قبلاً مشخص کرده‌ایم.) لذا می‌توانیم هنگام رسم شکل ۲ به جای مثلاً پاره‌خط، پاره‌خطی جهت‌دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۴ به‌دست می‌آید. این گراف نشان می‌دهد

که مثلاً تیم e از سه تیم a، c و d شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را **گراف جهت‌دار** می‌نامیم. Δ

مثال ۲: در درس شیمی دیده‌ایم که به هیدروکربن‌های اشباع شده نمودارهایی نسبت می‌دهند تا ساختار شیمیایی آن‌ها را به نمایش بگذارند. در شکل ۵ چند نمونه از این هیدروکربن‌ها را که فرمول عمومی آن‌ها C_nH_{2n+2} است می‌بینید.



CH_4: متان　　اتان: C_2H_6　　بوتان: C_4H_{10}　　ایزوبوتان: C_4H_{10}

شکل ۵ ــ چند نمونه از هیدروکربن‌ها

مثلاً نمودار مربوط به اتان که چگونگی پیوند کربن‌ها و هیدروژن‌ها را نشان می‌دهد ظرفیت کربن و هیدروژن را نیز مشخص می‌کند. در شکل ۵ می‌بینیم که با چهار کربن و ده هیدروژن دو هیدروکربن اشباع شده‌ی «مختلف» وجود دارند. بیش از دو تا چی؟ طبیعتاً پاسخ به این سؤال برای nهای بزرگتر از ۴ آسان نیست. Δ

مثال ۳: شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1، A_2، A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام‌های B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 برای تصدی این شغل‌ها داوطلب می‌شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند:

B_1 می‌تواند سه شغل A_1، A_2 و A_3 را اداره کند.

B_2 می‌تواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

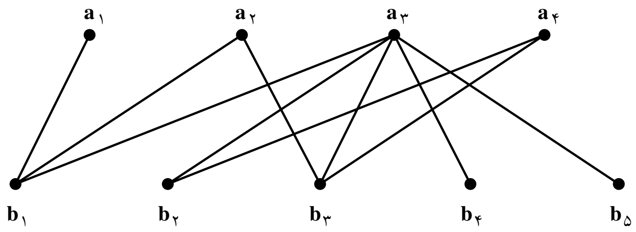
B_3 قادر است هر یک از شغل‌های A_2، A_3 و A_4 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم می‌توانند تنها متصدی شغل A_3 باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می‌تواند برای پست‌های خالی متصدی پیدا کند؟ این مسأله چند جواب دارد؟

برای بررسی این وضعیت باز هم یک مدل می‌سازیم. به این صورت که در صفحه، چهار نقطه متناظر با چهار شغل موردنظر و پنج نقطه‌ی دیگر متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می‌گیریم و

مطابق شکل ۶ هر نقطه‌ی b_i ، $1 \le i \le 5$ ، را با پاره‌خط یا پاره‌خط‌هایی به نقاطی چون a_j ، $1 \le j \le 4$ ، در صورتی وصل می‌کنیم که داوطلب B_i که با نقطه‌ی b_i در تناظر است صلاحیت انجام شغل A_j را که با نقطه‌ی a_j در تناظر است داشته باشد.



شکل ۶ــ گراف مربوط به مثال ۳

واضح است که برای تصدی A_1 تنها یک داوطلب وجود دارد و لذا این شغل به B_1 تخصیص داده می‌شود. حال تنها B_3 برای تصدی A_2 باقی می‌ماند. چون B_2 و B_3 تنها داوطلبان احراز پست A_4 هستند و B_3 قبلاً به‌کار A_2 گماشته شده است، A_4 باید الزاماً به B_2 سپرده شود. حال برای تصدی A_3 دو داوطلب باقی می‌مانند : B_4 و B_5 . پس این مسأله تنها دو جواب دارد و شرکت مجبور است B_1 را به‌کار A_1 ، B_3 را به‌کار A_2 ، B_2 را به‌کار A_4 و B_4 یا B_5 را به‌کار A_3 بگمارد. Δ

۱ــ۲ــ چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیده‌ی امروزی به مسائل فراوانی برمی‌خوریم که برای حل آن‌ها مجبوریم از مدلی ریاضی مانند گراف استفاده کنیم. لذا لازم است این وضعیت‌ها را به صورت مجرد درآوریم و با الهام گرفتن از همین مسائل به بررسی ویژگی‌های این مجردات بپردازیم. نظریه‌ی گراف‌ها به همین ترتیب به‌وجود آمده و به سرعت در حال رشد و شکوفایی است.

همان‌گونه که دیدیم گراف‌ها انواع گوناگون دارند. مثلاً برخی جهت‌دار و برخی چندگانه‌اند. برخی هم نامتناهی‌اند، به این معنا که بی‌نهایت نقطه یا بی‌نهایت خط دارند. اینک در بین انواع گراف‌ها تعریف رسمی ساده‌ترین نوع را ارائه می‌کنیم. در این قسمت تقریباً همه جا سروکار ما با همین گراف‌های (ساده) است.

تعریف: گراف (ساده‌ی) G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای V را **رأس‌های** G و اعضای E را **یال‌های** G می‌نامیم. مجموعه‌ی رأس‌های G را با V(G) و مجموعه‌ی یال‌های آن را با E(G) هم نمایش می‌دهیم.

به یاد داشته باشید که هر عضو یک مجموعه تنها یک بار در آن ظاهر می‌شود. مثلاً نمی‌نویسیم $\{a,a,a,b,b\}$ بلکه می‌نویسیم $\{a,b\}$.

مثال ۴: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\}\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و سه یال دارد. Δ

قرار داد: اگر در گراف G، $u,v\in V(G)$ و $\{u,v\}\in E(G)$، برای سادگی، به جای $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم در G دو رأس u و v **مجاورند**. در این صورت گاهی گفته می‌شود رأس u (همچنین رأس v) بر یال uv **واقع** است. اصطلاح رایج دیگر این است که در G یال uv از رأس u (همچنین از رأس v) **می‌گذرد** یا **مرور می‌کند**. رأس‌های u و v **دو سریال** uv نام دارند.

مثال ۵: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,cd,ce,de\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و هفت یال دارد. در این گراف مثلاً دو رأس a و b مجاورند زیرا $ab\in E$ ولی دو رأس b و e مجاور نیستند، زیرا $be\notin E$. واضح است که در این گراف از رأس a سه یال و از رأس b دو یال می‌گذرد. Δ

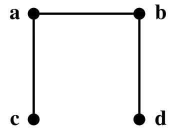
توجه دارید که هر گراف را می‌توان با یک نمودار، موسوم به **نمودار گراف**، نیز نمایش داد. برای این کار به‌ازای هر رأس G نقطه یا دایره‌ی کوچک دلخواهی، مثلاً در صفحه، در نظر می‌گیریم و دو نقطه‌ی متمایز را با پاره خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم به شرطی که مجموعه‌ی متشکل از دو رأس متناظر با آن دو نقطه عضوی از E باشد. یک نمودار گراف مثال ۴ را در شکل ۳ و یک نمودار گراف مثال ۵ را در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. شکل ۶ نموداری از گراف $G=(V,E)$ را نمایش می‌دهد که در آن:

$$V=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,b_۱,b_۲,b_۳,b_۴,b_۵\}$$

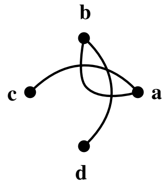
$$E=\{a_۱b_۱,a_۲b_۱,a_۲b_۳,a_۳b_۱,a_۳b_۲,a_۳b_۳,a_۳b_۴,a_۳b_۵,a_۴b_۲,a_۴b_۳\}$$

در این گراف از رأس $a_۳$ پنج یال مرور می‌کنند؛ ولی از هر یک از دو رأس $a_۱$ و $b_۵$ تنها یک یال می‌گذرد.

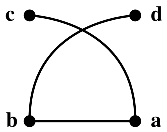
مثال ۶: اگر $V(G)=\{a,b,c,d\}$ و $E(G)=\{ab,ac,bd\}$ آن‌گاه G گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد. سه نمودار از این گراف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



شکل ۷



شکل ۸



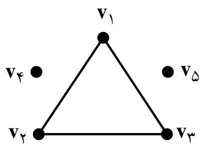
شکل ۹

سه نمودار مربوط به گراف مثال ۶

واضح است که در شکل‌های ۸ و ۹ نقطه‌ی برخورد کمان‌های ac و bd متناظر با هیچ رأس این گراف نیست. Δ

برای راحتی گاهی نمودار گراف را با خود آن یکی می‌گیریم و به همین دلیل رأس را **نقطه** و یال را **خط** هم می‌نامیم. توجه دارید که نمودار گراف برای درک بهتر مطلب رسم می‌شود و باید حتی‌الامکان ساده باشد.

مثال ۷: فرض کنید گراف G با $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ و $E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3\}$ داده شده است. آن‌گاه G پنج رأس و سه یال دارد. در این گراف مثلاً رأس v_4 با هیچ رأس دیگر G مجاور نیست. نمودار G به صورت زیر است که سه «بخش جدا از هم» دارد.



شکل ۱۰ــ گراف مربوط به مثال ۷

Δ

مثال ۸: گراف مربوط به بوتان که در شکل ۵ رسم شده است ۱۴ رأس و ۱۳ یال دارد. این گراف تنها یک «بخش» دارد و در آن مثلاً رأسی وجود دارد که دقیقاً با چهار رأس دیگر مجاور است ولی به‌طور مثال رأسی وجود ندارد که دقیقاً با سه رأس دیگر مجاور باشد. Δ

توجه کنید که اگر در تعریف گراف (ساده‌ی) G تغییر کوچکی بدهیم تعریف گراف جهت‌دار به‌دست می‌آید که کاربردهای فراوان دارد.

تعریف: گراف جهت‌دار G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است.

می‌توانیم به هر گراف جهتدار هم نموداری نسبت دهیم. به عنوان مثال، اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{(a,b),(a,c),(a,e),(c,d),(c,e),(d,b),(d,e)\}$ آنگاه (V,E) گراف جهت‌داری است که نمودار آن در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه دارید که در یک گراف جهت‌دار به‌ازای هر $u,v\in V$ با شرط $u\neq v$ حداکثر دو به اصطلاح یال جهت‌دار یکی از u به v و دیگری از v به u وجود دارند[1].

۱ــ۳ــ تمرین‌ها

۱ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_5 قادر به انجام کار A_4 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟

۲ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_2 قادر به انجام کار A_2 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ (پاسخ ۴ است.)

۳ــ مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های زیادی شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید ودر پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن را مشخص کنید.

۴ــ گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ و $E=\{v_1v_2,v_1v_4,v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4,v_5v_6\}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۵ــ در زبان عربی کلمه‌ی «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. درباره‌ی ارتباط بین «شجره نامه‌ی خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره‌نامه‌ی خانوادگی خود را رسم کنید.

۱ــ در تعریف گراف جهت‌دار بسیاری از مؤلفان E را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب متشکل از اعضای متمایز V می‌گیرند. بدانید که با این شرط مثلاً با ۲ رأس ۳ و با ۸ رأس ۱,۷۹۳,۳۵۹,۱۹۲,۸۴۸ گراف جهت‌دار «متفاوت» وجود دارند!

۶ـ شش بازه‌ی باز (۶,۹),(۳,۸),(۳,۴),(۲,۵),(۱,۴),(۰,۲) از اعداد حقیقی داده شده‌اند. با این بازه‌ها گرافی چون G می‌سازیم که رأس‌هایش متناظر با این بازه‌ها باشند و دو رأس G با این شرط مجاور باشند که بازه‌های مربوط متمایز باشند و اشتراک آن‌ها تهی نباشد. مثلاً چون اشتراک بازه‌های (۰,۲) و (۱,۴) تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های (۰,۲) و (۲,۵) تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند. (چنین گرافی را **گراف بازه‌ها** می‌نامیم.)

الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

ب) با معرفی پنج بازه‌ی مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازه‌ی باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آن‌ها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.

توجه: گراف‌هایی که از بازه‌ها به‌دست می‌آیند در باستان‌شناسی، ژنتیک و در تحلیل ادبی کاربرد دارند. درک عمیق این کاربردها مستلزم آگاهی از زمینه‌های مربوط است.

مجله‌ی ریاضی

می‌گویند در روزگاران پیش نقشه‌کش‌ها از این «واقعیت» آگاه بودند که هر نقشه‌ی جغرافیایی مسطح یا کروی را می‌توان با حداکثر چهاررنگ طوری رنگ کرد که مناطق «مجاور» رنگ‌های متفاوت داشته باشند. شاید هم **مسأله‌ی چهاررنگ** از تراوشات ذهن ریاضیدانان باشد. به هر تقدیر، نخستین مرجع مکتوب این مسأله نامه‌ی مورخ ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ میلادی اِ. دمورگن به ویلیام همیلتن است. مسأله‌ی چهاررنگ که به «مرض» چهاررنگ هم شهرت یافت بیش از یک قرن به‌طور جدی ذهن بسیاری را به خود مشغول داشت ودر نظریه‌ی گراف‌ها معادل‌های بسیاری برای آن مطرح شد.

سرانجام در سال ۱۹۷۷ میلادی ک. اَپِل وو. هَکِن با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از سریعترین کامپیوترهای زمان این مسأله‌ی سرکش رامهار و «قضیه‌ی» چهاررنگ را «ثابت» کردند. اما، هنوز هم مرض چهاررنگ شیوع دارد و بسیاری به فکر ارائه‌ی اثباتی سنتی و حتی‌الامکان ساده برای آن هستند.