هوالعلیم

دفترچه پیش‌آزمون و سوالات

آزمون مرحله‌ی مقدماتی (بهمن ۱۳۹۴)

رشته‌ی ریاضی پایه‌ی دوم و سوم دبیرستان

عنوان	صفحه	**مدت** زمان **پاسخ‌گویی**
پیش‌آزمون‌ها	۱۲-۲	۱۵ دقیقه
سوالات ۱ تا ۱۵ عمومی، سوالات ۱۶ تا ۲۵ اختصاصی براساس پیش‌آزمون	۱۶-۱۳	۶۰ دقیقه
پاسخ‌گویی به کلیه‌ی سوالات به صورت گروهی است. بنابراین توصیه می‌شود پس از جمع‌بندی نهایی یکی از اعضای گروه مسؤلیت وارد کردن پاسخ‌ها در پاسخ‌برگ را داشته باشد.		
به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، امتیاز یک پاسخ صحیح از بین می‌رود.		

لیگ علمی پایا مقطع دبیرستان در قالب گروه‌های ۵ نفره در رشته ریاضی برگزار می‌گردد.
این مرحله از لیگ علمی پایا شامل پیش‌آزمون، سوالات عمومی و سوالات پیش‌آزمون است.

۱) در قسمت اول آزمون هر کدام از اعضای گروه باید برگ پیش‌آزمون مربوط به خود را از دفترچه جدا نموده و به صورت انفرادی مطلب آموزشی (پیش‌آزمون) خود را در مدت زمان ۱۵ دقیقه مطالعه نمایند و به خاطر بسپارند.

۲) قسمت دوم آزمون، شامل ۱۵ سوال تستی ۵ گزینه‌ای از مطالب کتاب‌های درسی و منابع معرفی شده است که دانش‌آموزان به صورت گروهی به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

۳) بخش سوم سوالات، شامل پاسخ‌گویی به ۱۰سوال تستی ۵ گزینه‌ای است که همه اعضای گروه به کمک هم و با استناد به مطالب آموزشی که در بخش قبل مطالعه کرده‌اند به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

تذکر ۱. هر یک از اعضای گروه ملزم به مطالعه یکی از پیش‌آزمون‌ها می‌باشند و در غیر این صورت تخلف در آزمون محسوب می‌شود.

تذکر ۲. چنان‌چه گروهی ۴ نفره باشد یکی از اعضای گروه علاوه بر مطالعه پیش‌آزمون مربوط به خود مسؤلیت پیش‌آزمون ۵ را نیز بر عهده دارد.

تذکر ۳. چنان‌چه گروهی ۳ نفره باشد یکی از اعضای گروه می‌تواند مسؤلیت مطالعه پیش‌آزمون ۴ را برعهده بگیرد و گروه مجاز به مطالعه پیش‌آزمون ۵ نمی‌باشد.

تذکر ۴. هنگام پاسخ‌گویی به سؤالات، نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

پیش‌آزمون ۱

فرمول‌های تبدیل جمع یا تفاضل به حاصل‌ضرب و برعکس

می‌دانیم که اگر β,α دو زاویه باشند، داریم:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

حال اگر فرض کنیم $\alpha+\beta=p$ و $\alpha-\beta=q$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=۲\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin p+\sin q=۲\sin(\frac{p+q}{۲})\cos(\frac{p-q}{۲})$$

و به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$\sin p-\sin q=۲\sin(\frac{p-q}{۲})\cos(\frac{p+q}{۲})$$

$$\cos p+\cos q=۲\cos(\frac{p+q}{۲})\cos(\frac{p-q}{۲})$$

$$\cos p-\cos q=-۲\sin(\frac{p+q}{۲})\sin(\frac{p-q}{۲})$$

مثال ۱: عبارت $A=\sin ۵x-\sin x$ را به حاصل‌ضرب تبدیل کنید.

$$A=۲\sin ۲x\cos ۳x$$

مثال ۲: کسر $\dfrac{\sin ۸x+\sin ۵x+\sin ۲x}{\cos ۸x+\cos ۵x+\cos ۲x}$ را ساده کنید.

$$\frac{۲\sin\frac{۸x+۲x}{۲}\cos\frac{۸x-۲x}{۲}+\sin ۵x}{۲\cos\frac{۸x+۲x}{۲}\cos\frac{۸x-۲x}{۲}+\cos ۵x}=\frac{۲\sin ۵x\cos ۳x+\sin ۵x}{۲\cos ۵x\cos ۳x+\cos ۵x}$$

$$\frac{\sin ۵x(۲\cos ۳x+۱)}{\cos ۵x(۲\cos ۳x+۱)}=\tan ۵x$$

همان‌گونه که می‌دانیم:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=۲\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-۲\sin\alpha\sin\beta$$

از رابطه‌های بالا می‌توان به سادگی فرمول‌های تبدیل حاصل‌ضرب دو نسبت مثلثاتی را به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{-۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$$

پیش‌آزمون ۲

معادله‌های مثلثاتی کلاسیک نوع اول

هر معادله‌ی مثلثاتی که به‌صورت کلی $a\sin x + b\cos x = c$ باشد، به معادله‌ی کلاسیک نوع اول شهرت دارد. a، b و c ضریب‌های حقیقی ثابت و معلوم هستند و x نشان‌دهنده‌ی یک زاویه‌ی مجهول است. به روش حل این معادله دقت کنید:

ابتدا $\sin x$ و $\cos x$ را بر حسب تانژانت نصف زاویه می‌نویسیم:

$$\sin x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}} \qquad \cos x = \frac{۱-\tan^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}$$

پس از جایگذاری خواهیم داشت:

$$a\left(\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}\right) + b\left(\frac{۱-\tan^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}\right) = c$$

پس از مرتب‌سازی خواهیم داشت:

$$(c+b)\tan^{۲}\frac{x}{۲} - ۲a\tan\frac{x}{۲} + c - b = ۰$$

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{۲} = \dfrac{a+\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}}{c+b} \\ \tan\frac{x}{۲} = \dfrac{a-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}}{c+b} \end{cases}$$

اگر α و β زاویه‌هایی باشند که تانژانت آن‌ها مساوی ریشه‌های معادله فوق باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{۲} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + ۲\alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ \tan\frac{x}{۲} = \tan\beta \Rightarrow x = ۲k\pi + \beta \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به آن‌چه که برای $\tan\frac{x}{۲}$ به‌دست آمد، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که معادله‌ی کلاسیک نوع اول وقتی دارای جواب است که $a^۲ + b^۲ \geq c^۲$ باشد.

البته باید توجه داشت که از این روش وقتی می‌توان استفاده کرد که $x = ۲k\pi + \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ جواب معادله نباشد.

پیش‌آزمون ۳

معادله‌ی مثلثاتی کلاسیک نوع دوم

هر معادله‌ی مثلثاتی به شکل $a\tan x + b\cot x = c$ را یک معادله‌ی مثلثاتی کلاسیک نوع دوم می‌نامیم. برای حل این معادله قرار می‌دهیم: $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$. در این صورت خواهیم داشت:

$$a\tan x + b\cot x = c$$

$$a\tan x + \frac{b}{\tan x} = c \Rightarrow a\tan^{۲} x - c\tan x + b = ۰$$

$$\tan x = \frac{c \pm \sqrt{c^{۲} - ۴ab}}{۲a}$$

معادله وقتی جواب دارد که $c^{۲} - ۴ab \geq ۰$ باشد.

اگر α و β زاویه‌های معلومی باشند که تانژانت آن‌ها مساوی ریشه‌های معادله فوق باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{c + \sqrt{c^{۲} - ۴ab}}{۲a} \Rightarrow x = k\pi + \alpha & (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan x = \frac{c - \sqrt{c^{۲} - ۴ab}}{۲a} \Rightarrow x = k\pi + \beta & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی مثلثاتی $\tan x - (\sqrt{۲} - ۱)\cot x = \sqrt{۲} - ۲$ را حل کنید.

حل:

$$\tan x - (\sqrt{۲} - ۱)\frac{۱}{\tan x} = \sqrt{۲} - ۲$$

$$\tan^{۲} x-(\sqrt{۲}-۲)\tan x-(\sqrt{۲}-۱)=۰$$

$$\tan x=\frac{\sqrt{۲}-۲\pm\sqrt{۲+۴-۴\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}-۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}-۲\pm\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases}\tan x=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸} & (k\in\mathbb{Z})\\ \tan x=-۱\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

پیش‌آزمون ۴

معادله‌ی کلاسیک نوع سوم

هر معادله‌ی مثلثاتی به شکل $a\sin^{۲} x + b\cos^{۲} x + c\sin x\cos x = d$ را یک معادله‌ی مثلثاتی کلاسیک نوع سوم می‌نامیم. همان‌گونه که می‌بینید، تمام جمله‌ها برحسب سینوس و کسینوس از درجه‌ی دوم بوده و معادله فاقد جمله‌ی درجه‌ی اول است. برای حل این معادله:

۱- با فرض این‌که $\cos x \neq ۰$ باشد، دو طرف معادله را بر $\cos^{۲} x$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$a\tan^{۲} x + b + c\tan x = \frac{d}{\cos^{۲} x} = d(۱+\tan^{۲} x)$$

$$(a-d)\tan^{۲} x + c\tan x + b - d = ۰$$

شرط وجود جواب برای این معادله آن است که:

$$c^{۲} - ۴(a-d)(b-d) \geq ۰$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، حل معادله‌ی فوق به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم بالا بر حسب تانژانت زاویه‌ی مجهول منجر می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tan x = \dfrac{-c+\sqrt{c^{۲}-۴(a-d)(b-d)}}{۲(a-d)} = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \ , k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = \dfrac{-c-\sqrt{c^{۲}-۴(a-d)(b-d)}}{۲(a-b)} = \tan\beta \Rightarrow x = k\pi + \beta \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲- اگر $\cos x = ۰$ باشد، $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $(k \in \mathbb{Z})$ یکی از جواب‌های معادله است. حال تحقیق می‌کنیم که اگر جواب

$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ در معادله صدق کند، چه رابطه‌ای بین ضرایب وجود خواهد داشت. داریم:

$$a\sin^{۲}(k\pi+\frac{\pi}{۲})+b\cos^{۲}(k\pi+\frac{\pi}{۲})+c\sin(k\pi+\frac{\pi}{۲})\times\cos(k\pi+\frac{\pi}{۲})=d\Rightarrow a=d$$

هرگاه در معادله‌ی کلاسیک نوع سوم ضریب $\sin^{۲} x$ با مقدار ثابت d برابر شود، یعنی $a=d$، در این صورت $\cos x = ۰$ و برای حل، معادله طرفین را بر $\sin^{۲} x$ تقسیم می‌کنیم.

پیش‌آزمون ۵

معادله‌ی کلاسیک نوع چهارم

هر معادله‌ی مثلثاتی به فرم کلی $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x = c$ را یک معادله‌ی مثلثاتی کلاسیک نوع چهارم می‌نامیم. برای حل این معادله دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) حل معادله‌ی $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$

مجموع و حاصل‌ضرب را بر حسب $\cos(x - \frac{\pi}{۴})$ به‌ترتیب زیر تعیین می‌کنیم:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{۲} - x) = ۲\sin\frac{x + \frac{\pi}{۲} - x}{۲}\cos\frac{x - \frac{\pi}{۲} + x}{۲}$$

$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$\sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x) = \frac{۱}{۲}\cos(۲x - \frac{\pi}{۲})$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - ۱) = \cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{۱}{۲}$$

اگر به جای $\sin x + \cos x$ و $\sin x\cos x$ مقادیرشان را در معادله قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a\sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴}) + b\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{b}{۲} = c$$

$$۲b\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) + ۲a\sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴}) - b - ۲c = ۰$$

از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم اخیر که بر حسب $\cos(x - \frac{\pi}{۴})$ است، زاویه‌ی مجهول به سادگی تعیین می‌شود.

حالت دوم) حل معادله‌ی $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x = c$.

تفاضل و حاصل ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را بر حسب $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ به‌ترتیب زیر تعیین می‌کنیم:

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2(x - \frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2} - \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$$

اگر به جای $\sin x - \cos x$ و $\sin x\cos x$ مقدارهایشان را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2b\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - 2a\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 2c - b = 0$$

با حل معادله‌ی بالا بر حسب $\sin(x - \frac{\pi}{4})$، زاویه‌ی مجهول x تعیین می‌شود.

سوالات عمومی

۱. به ازای چند مقدار مختلف برای n $(n \in \mathbb{N})$ حاصل $n^4 + 4^n$ عددی اول است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴

۴) ۵ ۵) بیش از ۵

۲. $f(n)$ تابعی به صورت $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ و $f(1)=1$ می‌باشد. برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

الف) $3f(n)\times f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))$

ب) $f(2n)<6f(n)$

معادله‌ی $f(k)+f(m)=293$ دارای چند دسته جواب متمایز است؟ $(k<m)$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰

۴) صفر ۵) ۴

۳. تابع $f(n)$ را برابر با بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عبارت $100+n^2$ و $100+(n+1)^2$ با شرط $n\in\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. بیشترین مقدار $f(n)$ کدام است؟

۱) ۶۱۲ ۲) ندارد ۳) ۷۵

۴) ۱ ۵) ۴۰۱

۴. دنباله‌ی $\{a_n\}$ به این صورت تعریف شده است که $a_0=4$ ، $a_1=6$ و به ازای $n\ge 1$، $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$. مقدار عددی a_{2003} کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۴

۴) $\frac{1}{4}$ ۵) $\frac{1}{6}$

۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+6}$ برابر با چه عددی است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۹

۴) ۳۳ ۵) ۲۲

۶. فرض کنید a ، b و c اعداد صحیح و مثبتی باشند که در رابطه‌ی $29a+30b+31c=366$ صدق می‌کنند. مقدار عددی عبارت $19a+20b+21c$ برابر با چه عددی است؟

۱) ۱۵۸ ۲) ۱۹۵ ۳) ۲۴۶

۴) ۲۲۵ ۵) ۲۰۱

۷. فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد. چند تابع $f:A\longrightarrow A$ وجود دارد که برای هر $x\in A$ داشته باشیم $f(f(x))=f(x)$؟

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۷

۴) ۱۰   ۵) ۱۳

۸. مجموعه‌ی $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N}\ ,\ x<y$ و $۲x^۲-۵xy+۲y^۲-x-y-۱=۱۱\}$ دارای چند عضو است؟

۱) صفر   ۲) یک   ۳) دو

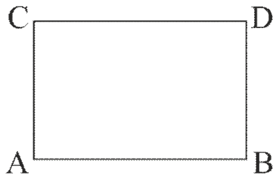
۴) سه   ۵) بی‌شمار

۹. یک دایره را به n قطاع (نه لزوماً هم اندازه) که همپوشانی ندارند، تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم هر قطاع را با یک رنگ از k تا رنگ $C_۱, C_۲, \ldots, C_k$ $(k\geq ۳)$ رنگ‌آمیزی کنیم؛ به طوری که هر قطاع فقط با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شده باشد و هر دو قطاع مجاور رنگ‌های متمایز داشته باشد، اگر $n=۵$ و $k=۶$ باشند، این کار به چند روش ممکن است؟ (دقت داشته باشید که لزومی به استفاده از همه‌ی رنگ‌ها نیست.)

۱) ۳۱۲۶   ۲) ۲۹۴۸   ۳) ۱۶۲۴

۴) ۵۰۱۲   ۵) هیچکدام

۱۰. نقاط A, B, C و D چهار رأس یک مستطیل می‌باشند. نقطه‌ی P وسط ضلع DB، نقطه‌ی Q وسط ضلع CD و نقطه‌ی R وسط ضلع AC قرار دارند. M نیز وسط پاره خط RQ است. مساحت مثلث MPA چه کسری از مساحت مستطیل $ABCD$ است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵) $\frac{۵}{۱۶}$

۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر با ۲۰ درجه است. روی ساق AC، AD را مساوی قاعده‌ی BC جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌نماییم. زاویه‌ی BDC چند درجه است؟

۱) ۳۵   ۲) ۲۵   ۳) ۳۰

۴) ۴۰   ۵) ۱۵

۱۲. فرض کنید m و n اعداد صحیح و مثبتی هستند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$n^۲<۸m<n^۲+۶۰(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$$

حداکثر مقدار ممکن برای n کدام است؟

۱) ۵۴   ۲) ۴۱   ۳) ۷۲

۴) ۶۵   ۵) ۱۸

۱۳.اگر $a = 100!$ ، $b = 2^{100}$ و $c = 2^{2^{2^{2^{2}}}}$ باشند، کدام مقایسه درست است؟

۱) $b < a < c$
۲) $a < b < c$
۳) $c < a < b$
۴) $b < c < a$
۵) $a < c < b$

۱۴.به ازای چند مقدار صحیح n دو چند جمله‌ای $x^3 + nx - 1$ و $x^3 + x - n^2$ ریشه حقیقی مشترک دارند؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه
۵) بیش از سه

۱۵.چند عدد طبیعی مانند x می‌توان پیدا کرد که در نامساوی زیر صدق کند؟

$$3\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_2 x)^2 - 2\log_{\sqrt{2}} x + 3} \le 12 - 3x$$

۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) دو
۴) یک
۵) چهار

سوالات اختصاصی

۱۶.اگر x جواب معادله‌ی مثلثاتی $4\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2\sqrt{2} - 1$ باشد، مقدار عبارت $1 - 2\sin^4 3x$ وقتی $0 < x < \frac{\pi}{3}$ برابر است با:

۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{4}$
۵) $\frac{1}{2}$

۱۷.معادله‌ی مثلثاتی $(m-1)\sin x + 2m\cos x = 5$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب‌های حقیقی است؟

۱) $-2 \le m \le \frac{12}{5}$
۲) $m \ge -2$
۳) $-1 \le m \le 1$
۴) $m \le -2$ و $m \ge \frac{12}{5}$
۵) $m \le -2$ و $m \ge -1$

۱۸.می‌دانیم که معادله‌ی مثلثاتی $2\tan x + (k^2 - 1)\cot x = 2(k-1)$ دارای جواب حقیقی است. مقدار k چه باید باشد؟

۱) $-4 \le k < 0$
۲) $k \ge -3$
۳) $-2 \le k \le 0$
۴) $-3 \le k \le 1$
۵) $1 < k < 2$

۱۹.به ازای کدام‌یک از مقادیر داده شده برای m جوابی برای معادله‌ی مثلثاتی $m\cos^2 x + 2(m-1)\sin^2 x - 2(m+3)\sin x\cos x = -3$ وجود ندارد؟

۱) $\sqrt{3}$
۲) صفر
۳) -1
۴) $\frac{5}{2}$
۵) 1

۲۰.کدام گزینه جواب معادله‌ی مقابل نیست؟ $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 6\sin x\cos x = 5$

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{7}{4}\pi$
۳) $\frac{9}{4}\pi$
۴) $\frac{-7\pi}{4}$
۵) $\frac{17\pi}{4}$

۲۱. معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۴x + \cos ۵x + \cos ۶x = ۰$ دارای دسته جوابی به صورت $x = \frac{k\pi}{۵} + \alpha$ $(k \in \mathbb{Z})$ است. مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۰}$
۴) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۵) $\frac{۳\pi}{۱۰}$

۲۲. معادله‌ی $۲\sin x + ۳\cos x = ۴$ در فاصله‌ی $۰ < x < ۲\pi$ دارای چند جواب است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو
۴) سه ۵) چهار

۲۳. اگر $\sqrt{۳}\sin x - \cos x = ۱$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۲۴. در معادله‌ی مثلثاتی $\tan ۲x - \cot(x - \frac{\pi}{۴}) = ۰$، می‌دانیم که جواب‌ها به صورت $x = k'\pi + \alpha$ و $x = k'\pi + \beta$ هستند و $k' \in \mathbb{Z}$. مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\pi$
۴) $\frac{۲}{۳}\pi$ ۵) $\frac{۳}{۵}\pi$

۲۵. اگر A مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $۵\sin x \ \sin ۲x \sin ۳x = ۴$ باشد، در مورد A می‌توان گفت:

۱) تهی است. ۲) حداقل یک عضو گویا دارد.
۳) حداقل یک عضو گنگ دارد. ۴) بی شمار عضو گنگ دارد.
۵) نیمی از اعضای آن در بازه‌ی $(۰,\pi)$ هستند.

پیام بسیار مهم

دانش آموزان عزیز شرکت کننده در نهمین دوره لیگ علمی پایا !

خدا قوت...

شما عزیزان برای دسترسی سریعتر به منابع، اطلاعیه های مراحل بعدی پایا و نتایج می بایست به کانال تلگرام دبیرخانه پایا بپیوندید. برای این منظور آدرس کانال را در نرم افزار تلگرام وارد نموده و به محض ورود بر روی گزینه Join کلیک نمایید.

آدرس تلگرامی:@payaleague

آدرس اینترنتی:Telegram.me/payaleague

منتظر حضورتان هستیم..

موفق باشید.