نهمین دوره لیگ علمی بین المللی پایا

9th International Scientific Paya League

هوالعلیم

دفترچه پیش‌آزمون و سوالات
آزمون مرحله‌ی نیمه‌نهایی (اردیبهشت ۱۳۹۵)

پایه‌های دوم و سوم دبیرستان
رشته‌ی ریاضی

عنوان	صفحه	مدت زمان پاسخ‌گویی
پیش‌آزمون‌ها	۱۰ -۲	۱۵ دقیقه
سوالات ۱ تا ۱۵ عمومی، سوالات ۱۶ تا ۲۵ اختصاصی براساس پیش‌آزمون	۱۶ -۱۱	۶۰ دقیقه
پاسخ‌گویی به کلیه‌ی سوالات به صورت گروهی است. بنابراین توصیه می‌شود پس از جمع‌بندی نهایی یکی از اعضای گروه مسؤلیت وارد کردن پاسخ‌ها در پاسخ‌برگ را داشته باشد.		
به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، امتیاز یک پاسخ صحیح از بین می‌رود.		

لیگ علمی پایا مقطع دبیرستان در قالب گروه‌های ۵ نفره در رشته **ریاضی** برگزار می‌گردد.
این مرحله از لیگ علمی پایا شامل پیش‌آزمون، سوالات عمومی و سوالات پیش‌آزمون است.

۱) در قسمت اول آزمون هر کدام از اعضای گروه باید برگ پیش‌آزمون مربوط به خود را از دفترچه جدا نموده و به صورت انفرادی مطلب آموزشی (پیش‌آزمون) خود را در مدت زمان ۱۵ دقیقه مطالعه نمایند و به خاطر بسپارند.

۲) قسمت دوم آزمون، شامل ۱۵ سوال تستی ۵ گزینه‌ای از مطالب کتاب‌های درسی و منابع معرفی شده است که دانش‌آموزان به صورت گروهی به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

۳) بخش سوم سوالات، شامل پاسخ‌گویی به ۱۰سوال تستی ۵ گزینه‌ای است که همه اعضای گروه به کمک هم و با استناد به مطالب آموزشی که در بخش قبل مطالعه کرده‌اند به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

تذکر ۱. هر یک از اعضای گروه ملزم به مطالعه یکی از پیش‌آزمون‌ها می‌باشند و در غیر این صورت تخلف در آزمون محسوب می‌شود.

تذکر ۲. چنان‌چه گروهی ۴ نفره باشد یکی از اعضای گروه علاوه بر مطالعه پیش‌آزمون مربوط به خود مسؤلیت پیش‌آزمون ۵ را نیز بر عهده دارد.

تذکر ۳. چنان‌چه گروهی ۳ نفره باشد یکی از اعضای گروه می‌تواند مسؤلیت مطالعه پیش‌آزمون ۴ را برعهده بگیرد و گروه مجاز به مطالعه پیش‌آزمون ۵ نمی‌باشد.

تذکر ۴. هنگام پاسخ‌گویی به سؤالات، نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

تذکر ۴. هنگام پاسخ‌گویی به سؤالات نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

پیش‌آزمون ۱

مرور برخی مفاهیم و روابط

اگر مثلث ABC را در نظر بگیریم و عمود منصف‌های اضلاع آن را رسم کنیم، همگی عمودمنصف‌ها در یک نقطه همرس خواهند بود که نقطه‌ی همرسی بسته به نوع مثلث می‌تواند داخل یا خارج مثلث قرار داشته باشد. نقطه‌ی همرسی را O می‌نامیم. با توجه به خاصیت عمود منصف می‌توانیم بنویسیم $OA=OB=OC=R$.

در نتیجه می‌توانیم دایره‌ای رسم کنیم که مرکزش O و شعاعش R باشد و از سه رأس مثلث ABC بگذرد. به این دایره، دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گوییم و داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

حال اگر نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC را رسم کنیم، این سه نیم‌ساز در نقطه‌ای مانند I داخل مثلث همرس هستند. فاصله‌ی I تا سه ضلع مثلث برابر بوده و مقدار آن را r در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توانیم دایره‌ای به مرکز I و به شعاع r رسم کنیم که این دایره در داخل مثلث قرار داشته و بر سه ضلع آن مماس باشد. چنین دایره‌ای، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC نامیده می‌شود و اگر S مساحت مثلث ABC باشد. داریم: $S=pr$ که در آن p نصف محیط مثلث ABC است.

مثلث یک شکل محاطی و محیطی است، به این معنی که می‌توان همواره دایره‌ای پیدا کرد که از سه رأس آن بگذرد. همچنین می‌توان همیشه دایره‌ای یافت که بر سه ضلع آن مماس باشد. هر چندضلعی که بتوان رئوس آن را روی یک دایره قرار داد، یک چندضلعی محاطی و در صورتی‌که بتوان دایره‌ای پیدا کرد که بر تمام اضلاع آن مماس باشد، چندضلعی محیطی نامیده می‌شود.

همچنین می‌توان مساحت یک مثلث را با دانستن فقط اضلاع آن با استفاده از رابطه‌ی هرون محاسبه کرد:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$p=\frac{a+b+c}{۲}$$

مطلب دیگری که باید به آن اشاره داشته باشیم و در حل مسائل هندسی دارای کاربرد است، مربوط به نامساوی‌هاست.

اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند. داریم:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}}\le\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{۲}\le\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}$$

برای سه عدد حقیقی و مثبت x ، y و z رابطه‌های بالا به شکل زیر در می‌آیند:

$$\frac{۳}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}}\le\sqrt[۳]{xyz}\le\frac{x+y+z}{۳}\le\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۳}}$$

پیش‌آزمون ۲

حداقل و حداکثرسازی محیط و مساحت اشکال هندسی

در این پیش‌آزمون قصد داریم تا درباره‌ی ایده‌ها و روش‌های مختلف برای حل مسائل حداقل و حداکثرسازی محیط و مساحت اشکال مختلف هندسی بحث کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱: ثابت کنید در بین تمام مثلث‌های با محیط ثابت، مثلث متساوی الاضلاع حداکثر مساحت را دارا می‌باشد.

اثبات: اگر طول اضلاع مثلث ABC را a، b و c بگیریم و محیط آن را $2p$ فرض کنیم، مساحت آن S طبق رابطه‌ی هرون عبارت است از:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بنابر فرض مسئله می‌دانیم که مقدار محیط مثلث عددی معلوم و ثابت است. پس p یعنی نصف آن نیز عددی ثابت خواهد بود. از طرفی چون S کمیتی مثبت است، پس ماکزیمم کردن آن با ماکزیمم کردن S^2 تفاوتی نخواهد داشت.

می‌دانیم طبق نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$. پس به‌کار بردن این نامساوی خواهیم داشت:

$$\frac{p}{3}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

نامساوی اخیر به این معنی است که حاصل‌ضرب سه پارامتر $(p-a)$، $(p-b)$ و $(p-c)$ که جمع ثابتی برابر با p دارند، حداکثر می‌تواند برابر $(\frac{p}{3})^3$ شود و بنا بر حالت تساوی در نامساوی حسابی – هندسی این مقدار حداکثری زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$p-a=p-a=p-c\Rightarrow a=b=c$$

رابطه‌ی به‌دست آمده نشان می‌دهد که مثلث مطلوب یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مثال ۲: در بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر معلوم، کدام مثلث بیشترین محیط را دارد؟

حل: فرض کنید مثلث ABC با وتر ثابت a را در اختیار داریم. چون $\hat{A}=90^\circ$، پس مکان هندسی رأس A روی یک دایره به قطر BC خواهد بود. هدف ما حداکثر کردن (ماکزیمم کردن) عبارت $b+c$ است. اکنون باید یک شرط اضافی به مسئله بیفزاییم تا مسئله قابل حل شود که این شرط با استفاده از رابطه فیثاغورس به‌دست می‌آید: $a^2=b^2+c^2$

از آن‌جا که a^2 مقدار ثابتی است، پس b^2+c^2 نیز مقدار ثابتی را دارد.

با توجه به نامساوی میانگین مربعی ـ حسابی داریم:

$$\sqrt{\frac{b^{۲}+c^{۲}}{۲}} \geq \frac{b+c}{۲} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{۲}} \geq \frac{b+c}{۲} \Rightarrow$$

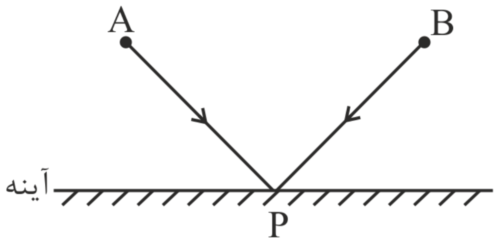
$$\max(b+c)=a\sqrt{۲} \Rightarrow b=c=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

بنابراین مثلثی که به دنبال آن هستیم، یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

پیش‌آزمون ۳

نامساوی‌های هندسی در مثلث

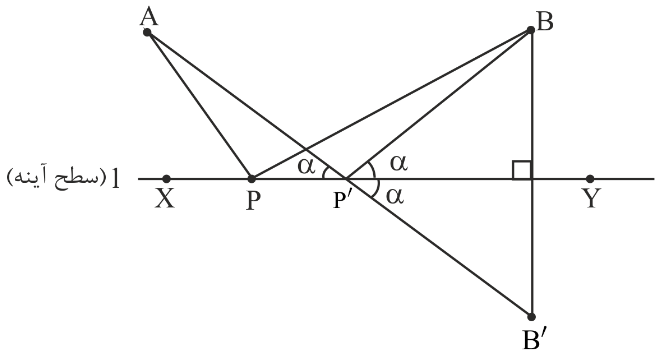
با اصل بازتاب شروع می‌کنیم. این اصل در واقع یک اصل فیزیکی است که بیان می‌دارد نور همواره کمترین مسیر را طی می‌کند. فرض کنید یک آینه و دو نقطه‌ی A و B وجود دارند. می‌خواهیم مسیری را که نور طی می‌کند تا پس از انعکاس یافتن در آینه، A و B یکدیگر را ببینند، پیدا کنیم. دقت داشته باشید که بنابر اصل بازتاب، باید در واقع مسیری را بیابیم که طولش حداقل مقدار ممکن باشد. اکنون فرض کنید نقطه‌ای روی آینه که در آن جا نور منعکس می‌شود، P باشد. هدف این است که نقطه‌ای مانند P بیابیم که مقدار $PA+PB$ حداقل شود.



از تقارن استفاده کرده و B' قرینه‌ی B را نسبت به آینه روی شکل مشخص می‌کنیم. واضح است که $PB=PB'$. در ادامه، P' را محل برخورد پاره‌خط AB' و آینه در نظر بگیرید.

باز هم به وضوح داریم $P'B=P'B'$. پس می‌توان نوشت:

$$PA+PB=PA+PB'$$
$$P'A+P'B=P'A+P'B'=AB'$$



از طرفی بنابر نامساوی مثلث در $\Delta APB'$ داریم:

$$AP+PB'\geq AB'\Rightarrow PA+PB\geq P'A+P'B$$

از این نامساوی و فرض حداقل بودن $PA+PB$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی P باید روی نقطه‌ی P' باشد و در واقع حالت تساوی تنها زمانی است که P و P' بر هم منطبق باشند. پس زاویه‌های پاره‌خط‌های BP' و AP' با آینه با یکدیگر برابرند و چون P و P' بر هم منطبق هستند، داریم:

$$A\hat{P}X=B\hat{P}Y=\alpha$$

اکنون به مثال زیر نیز توجه کنید:

مثال: اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند و نقطه‌ی P درون یا روی محیط مثلث ABC و فواصل P از اضلاع مثلث را با m ، n و p نمایش دهیم، حداقل مقدار $m+n+p$ چه زمانی به‌دست می‌آید؟

حل: فرض کنید طول اضلاع مثلث ABC را با a ، b و c نشان دهیم.

می‌توان فرض کرد $a \geq b \geq c$.

$$S_۱ = S_{(P\overset{\Delta}{B}C)} = \frac{ma}{۲} \Rightarrow ma = ۲S_۱$$

به روش مشابهی داریم:

$$pc = ۲S_۳ = ۲S_{(A\overset{\Delta}{P}B)} \ , \ nb = ۲S_۲ = ۲S_{(C\overset{\Delta}{P}A)}$$

$$\begin{cases} ma = ۲S_{(P\overset{\Delta}{B}C)} \\ nb = ۲S_{(A\overset{\Delta}{P}C)} \\ pc = ۲S_{(A\overset{\Delta}{P}B)} \end{cases} \Rightarrow ma + nb + pc = ۲(S_{(B\overset{\Delta}{P}C)} + S_{(C\overset{\Delta}{P}A)} + S_{(A\overset{\Delta}{P}B)}) = ۲S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}$$

$$۲S_{(A\overset{\Delta}{B}C)} = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow h_a \leq h_b \leq h_c$$

$$ah_a = ma + nb + pc \leq ma + na + pa = (m+n+p)a$$

$$\Rightarrow \ h_a \leq m+n+p \Rightarrow \ \min(m+n+p) = h_a$$

پیش‌آزمون ۴

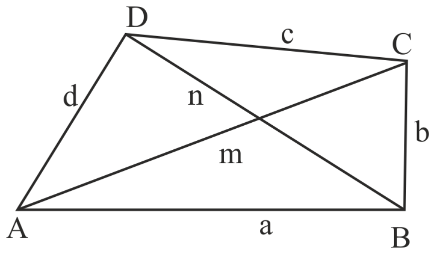
قضیه‌های بطلمیوس و ژرگون

قضیه‌ی بطلمیوس: در چهارضلعی دلخواه $ABCD$ همواره نامساوی زیر برقرار است:

$$AB\times DC+BC\times AD\geq AC\times BD$$

برای سادگی اگر طول اضلاع چهارضلعی را با a، b، c و d و طول قطرهای آن را با m و n (مطابق شکل) نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$ac+bd\geq mn$$



حالت تساوی فقط زمانی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، یعنی رئوس آن بتوانند هم‌زمان روی محیط یک دایره قرار بگیرند.

اثبات: نقطه‌ی M را داخل چهارضلعی طوری انتخاب می‌کنیم که دو مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ با یکدیگر متشابه باشند و داشته باشیم:

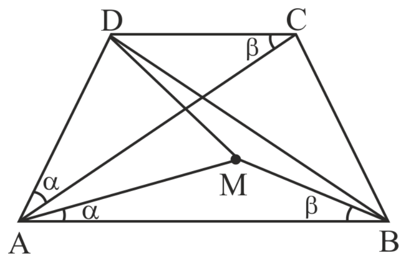
$$M\hat{A}B=D\hat{A}C=\alpha \qquad , \qquad M\hat{B}A=D\hat{C}A=\beta$$

از تشابه این دو مثلث خواهیم داشت:

$$\frac{MB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AD} \quad (۱)$$

و یا به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AD} \quad (۲)$$



می‌دانیم که $D\hat{A}M=\alpha+M\hat{A}C$ و در نتیجه

$$B\overset{\Delta}{A}C\sim M\overset{\Delta}{A}D\Rightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DM} \quad (۳)$$

از رابطه‌های (۱) و (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AB\times DC = AC\times MB \\ AD\times BC = AC\times MD \end{cases} \Rightarrow$$

$$AB\times DC + AD\times BC = AC(MB+MD)$$

$$MD+MB \geq BD \Rightarrow AB\times DC + AD\times BC \geq AC\times BD$$

حالت تساوی موقعی رخ می‌دهد که M روی BD باشد و در نتیجه $M\hat{B}D = ۰$ که در این‌صورت داریم:

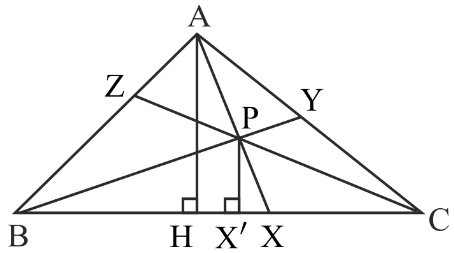
$A\hat{B}D = A\hat{C}D = \beta$ که معادل محاطی بودن چهارضلعی $ABCD$ است.

قضیه‌ی ژرگون: اگر از هر رأس یک مثلث به نقطه‌ای روی ضلع مقابل آن وصل کنیم، یک پاره‌خط به‌دست می‌آید که اصطلاحاً آن را خط سوایی می‌نامیم. حال اگر سه خط سوایی BY, AX و CZ از مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ در نقطه‌ی P همرس باشند، داریم:

$$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=۱$$

اثبات: از نقطه‌ی P عمود PX' را بر BC رسم می‌کنیم. اگر H پای ارتفاع رأس A بر BC باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{PX}{AX}=\frac{PX'}{AH}=\frac{PX'\times BC}{AH\times BC}=\frac{S_{(B\overset{\Delta}{P}C)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}$$



به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{PY}{BY}=\frac{S_{(C\overset{\Delta}{P}A)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}\ ,\ \frac{PZ}{CZ}=\frac{S_{(A\overset{\Delta}{P}B)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{PX}{AX}&=\frac{S_{(B\overset{\Delta}{P}C)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}} \\ \frac{PY}{BY}&=\frac{S_{(C\overset{\Delta}{P}A)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}} \\ \frac{PZ}{CZ}&=\frac{S_{(A\overset{\Delta}{P}B)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=\frac{S_{(P\overset{\Delta}{B}C)}+S_{(C\overset{\Delta}{P}A)}+S_{(A\overset{\Delta}{P}B)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}=\frac{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}{S_{(A\overset{\Delta}{B}C)}}=۱$$

پیش‌آزمون ۵

نامساوی‌های جبری بین اجزای مثلث

هدف ما در این پیش‌آزمون، به‌دست آوردن روابط نامساوی‌های بین اجزای یک مثلث است که می‌توانند شامل a، b، c، R و ($r =$ شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و $R =$ شعاع دایره‌ی محیطی) و یا سینوس و کسینوس زاویه‌های مثلث باشند.

در ابتدا لازم است روابط ویت را که در جبر چندجمله‌ای‌ها به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی کنیم.

فرض کنید $P(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ باشد.

اگر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های این چندجمله‌ای باشند، روابط زیر بین این ریشه‌ها و ضرایب چندجمله‌ای برقرار است:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = -\frac{b}{a}$$

$$x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳ = \frac{c}{a}$$

$$x_۱x_۲x_۳ = \frac{-d}{a}$$

از به‌دست آوردن چندجمله‌ای درجه سومی شروع می‌کنیم که ریشه‌های آن اضلاع مثلث یعنی a ، b و c باشند و سعی می‌کنیم ضرایب این چندجمله‌ای را بر حسب تنها R، r و p که به‌ترتیب شعاع‌های دوایر محیطی و محاطی داخلی و نیز نصف محیط مثلث هستند، بیان کنیم. می‌دانیم که:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c = ۲p \\ S = \dfrac{abc}{۴R} = pr \end{array}\right\} \Rightarrow abc = ۴Rrp$$

اکنون کافی است عبارت $ab + bc + ca$ را نیز بر حسب r, R و p بنویسیم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = pr^{۲}$$

$$\Rightarrow p^{۳} - p^{۲}(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc = pr^{۲}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = p^{۲} + r^{۲} + ۴Rr$$

پس چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از:

$$P(x) = x^{۳} - ۲px^{۲} + (p^{۲} + r^{۲} + ۴Rr)x - ۴Rrp$$

مثال: در هر مثلث با اضلاع a، b و c ثابت کنید:

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \geq ۴\sqrt{۳}\, S + (a-b)^{۲} + (b-c)^{۲} + (c-a)^{۲}$$ (S مساحت مثلث است.)

اثبات : پس از ساده کردن طرفین به نامساوی زیر خواهیم رسید:

$$۲(ab + bc + ca) - (a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}) \geq ۴\sqrt{۳}S$$

با توجه به روابط $ab+bc+ca=p^۲+r^۲+۴Rr$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۲(p^۲-r^۲-۴Rr)$ و نیز $S=rp$ داریم:

$$۲(p^۲+r^۲+۴Rr)-۲(p^۲-r^۲-۴Rr)\geq ۴\sqrt{۳}pr$$

$$\Rightarrow ۴Rr+r^۲\geq \sqrt{۳}pr \Rightarrow ۴R+r\geq \sqrt{۳}p$$

$$(۴R+r)^۲\geq (\sqrt{۳}p)^۲ \Rightarrow ۱۶R^۲+۸Rr+r^۲\geq ۳p^۲$$

پس کافی است نشان دهیم:

$$۱۶R^۲+۸Rr+r^۲\geq ۳(۴R^۲+۴Rr+۳r^۲)$$

$$\Rightarrow R^۲-Rr-۲r^۲\geq ۰ \Rightarrow (R-۲r)(R+r)\geq ۰ \Rightarrow R\geq ۲r$$

که نامساوی $R\geq ۲r$ یک نامساوی معمول در هندسه است.

سوالات عمومی

۱. دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_۱=۵\ ,\ a_{n+۱}-a_n=۳+۴(n-۱)\ ,\ n\geq ۱$$

اگر a_n را به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب n بیان کنیم، مجموع جبری ضریب آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵

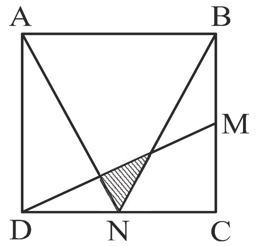
۴) ۶ ۵) ۱۱

۲.فرض کنیم $[x]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد x باشد. در این صورت معادله‌ی $۴x^۲-۴۰[x]+۵۱=۰$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو

۴) سه ۵) بیش از سه

۳. مربع $ABCD$ به ضلع واحد و نقطه‌های M و N به‌ترتیب وسط BC و CD را در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده برابر است با:



۱) $\frac{۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۶۰}$

۴) $\frac{۱}{۱۰}$ ۵) $\frac{۱}{۴۵}$

۴.تعداد تابع‌های متمایز $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند، چند است؟

$$۲(f(۱-x))^۲+(f(x))^۲=۲$$

۱) یک ۲) دو ۳) چهار

۴) شش ۵) بی‌شمار

۵. دنباله‌ی متناوب $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_۰=a\ ,\ x_۱=b\ ,\ x_{n+۱}=\frac{۱}{۲}(x_{n-۱}+\frac{۱}{x_n})\ ,\ n\geq ۱$$

مقدار ab کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱ ۵) ۲-

۶.کمترین مقدار عبارت زیر که در آن $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... و $x_{۱۳۹۵}$ عددهایی حقیقی در بازه‌ی $(\frac{۱}{۴},۱)$ هستند، چیست؟

(راهنمایی: اگر $a_۱$، $a_۲$،....و a_n اعداد صحیح و مثبتی باشند، داریم: $\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i}{n}\geq\sqrt[n]{a_۱a_۲\times...\times a_n}$)

$$A=\log_{x_۱}(x_۲-\frac{۱}{۴})+\log_{x_۲}(x_۳-\frac{۱}{۴})+...+\log_{x_{۱۳۹۵}}(x_۱-\frac{۱}{۴})$$

۱) ۲۷۹۰

۲) ۶۹۵

۳) ۱۳۹۵

۴) ۵۵۸۰

۵) ۱

۷. معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چند جواب متمایز دارد؟

$$2(2^x-1)x^2+(2^{x^2}-2)x=2^{x+1}-2$$

۱) صفر　　۲) یک　　۳) دو
۴) سه　　۵) بیش از سه

۸. فرض کنید $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ و $f(1,1)=2$ و به ازای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$f(m+1,n)=f(m,n)+m$$
$$f(m,n+1)=f(m,n)-n$$

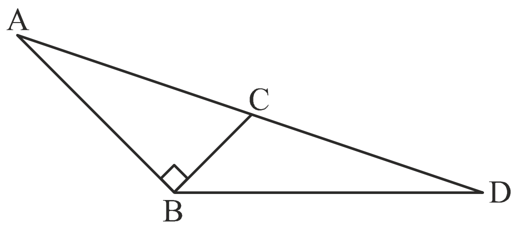
چند زوج متمایز (p,q) می‌توان یافت که $f(p,q)=2001$؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲
۴) ۳　　۵) بیش از سه

۹. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به اضلاع ۳، ۴ و ۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید P نقطه‌ای داخل یا روی اضلاع مثلث طوری است که مجموع فاصله‌ی P از اضلاع مثلث کمترین مقدار ممکن است. این مقدار کدام است؟

۱) $\frac{6}{25}$　　۲) $\frac{12}{25}$　　۳) $\frac{6}{5}$
۴) $\frac{12}{5}$　　۵) $\frac{16}{5}$

۱۰. در شکل زیر فرض کنید $AB=CD=1$. در این صورت طول AC کدام است؟ $(C\hat{B}D=30^\circ)$



۱) $\sqrt[3]{2}$　　۲) $\sqrt[3]{3}$
۳) $\sqrt{2}$　　۴) $\frac{3}{2}$
۵) $\sqrt{3}$

۱۱. نقاط P و Q به‌ترتیب روی امتداد ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC که تمام زاویه‌های آن حاده‌اند، قرار دارند. اگر $PC=3$، $QB=6$ و $Q\hat{B}C=P\hat{C}B=90^\circ$ باشند، اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳
۴) ۴　　۵) ۴/۵

۱۲. چند عدد صحیح و مثبت می‌توان پیدا کرد که توانی از ۲ باشند و با جابه‌جایی ارقام آن توان دیگری از ۲ حاصل شود؟

۱) صفر　　۲) یک　　۳) دو
۴) سه　　۵) بیش از سه

۱۳. یک جدول مربع شکل 3×3 داریم. به چند روش می‌توانیم خانه‌های آن را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، به طوری که در هر مربع 2×2 آن دقیقاً دو خانه سیاه باشند؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۴　　۳) ۱۶
۴) ۲۰　　۵) ۲۴

۱۴. تعداد عددهای سیزده رقمی با رقم‌های ۱ و ۲ که رقم هشتم (از سمت چپ) آن‌ها برابر ۱ باشد و هیچ دو رقم ۲ مجاور هم نباشند، چند تاست؟

۱) ۲۷۲ ۲) ۲۷۳ ۳) ۳۴۲

۴) ۳۶۲ ۵) ۴۴۲

۱۵. با توجه به معادله‌ی $\tan^۲\frac{x}{۳}-\cos x+۱=۰$ مقدار $\sin(\frac{۵x}{۶}+\frac{\pi}{۴})$ برابر است با:

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۵) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

سوالات اختصاصی

۱۶. مساحت دسته‌ای از مثلث‌ها (هر کدام از آن‌ها) برابر با $\sqrt{۳}cm^{۲}$ می‌باشد. حداقل محیط در بین مثلث‌های موجود چه عددی می‌تواند باشد؟ (فرض کنید از هر نوع مثلث حداقل یکی موجود است.)

۱) ۳
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۲}$
۵) ۶

۱۷. در بین مثلث‌های با محیط ثابت و طول قاعده‌ی ثابت، کدام مثلث دارای حداکثر مساحت است؟

۱) متساوی‌الساقین
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الاضلاع
۴) مثلث با یک زاویه‌ی باز
۵) نمی‌توان گفت

۱۸. دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۸}$ داریم. در میان مثلث‌های محاط در این دایره، بیشترین مقدار مساحت ممکن کدام است؟ (راهنمایی: در مثلث ABC داریم: $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$)

۱) $\sqrt{۷۴}$
۲) $\sqrt{۱۲۰}$
۳) $\sqrt{۸۰}$
۴) $\sqrt{۱۰۸}$
۵) $\sqrt{۹۶}$

۱۹. نقطه‌ی P را درون یا روی اضلاع مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اگر فواصل P را از اضلاع مثلث با p ، n و m نشان دهیم، نقطه‌ی P کجا باشد تا مقدار mnp حداکثر شود؟

۱) محل برخورد نیم‌سازهای داخلی مثلث
۲) محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث
۳) محل برخورد ارتفاع‌های وارد بر اضلاع مثلث
۴) محل برخورد میانه‌های اضلاع مثلث
۵) محل برخورد هر سه خط سوایی دلخواه که همرس باشند.

۲۰. فرض کنید AS ، AR ، AQ و AP وترهایی از یک دایره هستند که داریم: $P\hat{A}Q=Q\hat{A}R=R\hat{A}S$، کدام گزینه با AQ برابر است؟

۱) $\frac{AR}{AS}(AP+AR)$
۲) $\frac{AS}{AR}(AS+AR)$
۳) $AR(\frac{AP+AR}{AS+AQ})$
۴) $AS(\frac{AP+AR}{AS+AQ})$
۵) $AS(\frac{AS+AR}{AP})$

۲۱. طول اضلاع مثلث ABC عبارتند از $AB=۲cm$ ، $AC=۳cm$ و $BC=۴cm$، نقطه‌ی دلخواه O داخل مثلث مفروض است. اگر امتداد خطوط CO ، BO و AO اضلاع مثلث را به‌ترتیب در C' ، B' و A' قطع کنند، بیشترین مقدار $OA'+OB'+OC'$ برابر با چند cm است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۵) ۳/۵

۲۲.فرض کنید O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC با شعاع برابر ۱۰ باشد. خطوط CO ، BO و AO اضلاع مثلث را به‌ترتیب در C' ، B' و A' قطع می‌کنند. حداقل مقدار $AA'+BB'+CC'$ کدام است؟

(راهنمایی: اگر x ، y و z سه عدد حقیقی مثبت باشند،داریم: $(x+y+z)(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z})\geq ۹$)

۱) ۲۵ ۲) ۱۵

۳) ۴۵ ۴) ۳۶

۵) ۴۸

۲۳. فرض کنید خطوط سوایی CC' ، BB' و AA' در نقطه‌ی M داخل مثلث ABC همرس باشند، کمترین مقدار عبارت $\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) ۹

۵) ۶

۲۴. در مثلث ABC مقدار $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}$ برابر است با: (r و R شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و محیطی‌اند)

۱) $\frac{R-r}{R}$ ۲) $\frac{R-r}{r}$

۳) $\frac{R+r}{r}$ ۴) $\frac{R+r}{R}$

۵) $\frac{R-r}{R+r}$

۲۵. می‌دانیم در مثلث ABC رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

حداکثر مقدار $\sin A . \sin B . \sin C$ برابر است با:

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۵) ۳

پیام بسیار مهم

دانش‌آموزان عزیز شرکت‌کننده در نهمین دوره لیگ علمی پایا !

خدا قوت...

شما عزیزان برای دسترسی سریع‌تر به منابع، اطلاعیه‌های مراحل بعدی پایا و نتایج می‌بایست به کانال تلگرام دبیرخانه پایا بپیوندید. برای این‌منظور آدرس کانال را در نرم‌افزار تلگرام وارد نموده و به محض ورود بر روی گزینه Join کلیک نمایید.

آدرس تلگرامی:@payaleague

آدرس اینترنتی:Telegram.me/payaleague

منتظر حضورتان هستیم..

موفق باشید.